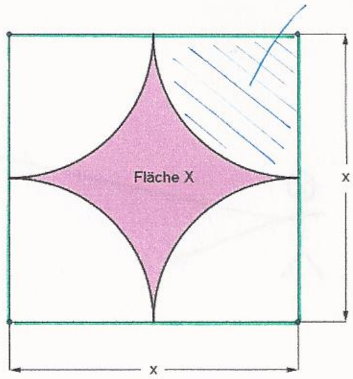
Geometrie-Aufgaben: *Kreisberechnungen 2*

1. Berechne den Inhalt der Fläche X:

   (a) für $x = 70$. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{X = 1051{,}549}}$

   (b) allgemein.

$A_{\triangle}$



allg.: $X = A_{\square} - 4 \cdot A_{\triangle}$

$= x^2 - 4 \cdot \frac{(x/2)^2 \cdot \pi}{4}$

$= x^2 - \frac{x^2 \pi}{4}$

$= \underline{\underline{x^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$

2. Berechne den Inhalt der Fläche A:

   (a) für $x = 50$. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A = 490{,}874}}$

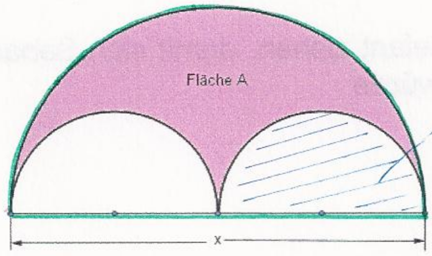
   (b) allgemein.

allg.: $A = A_{\triangle} - 2 \cdot A_{\triangle}$

$= \frac{(x/2)^2 \cdot \pi}{2} - 2 \cdot \frac{(x/4)^2 \cdot \pi}{2}$

$= \frac{x^2 \cdot \pi}{8} - \frac{x^2 \pi}{16}$

$= \underline{\underline{\frac{x^2 \pi}{16}}}$



$A_{\triangle}$

3. Berechne den Inhalt der Fläche A:

   (a) für $x = 16$. $\Rightarrow$ $\underline{A = 27{,}465}$

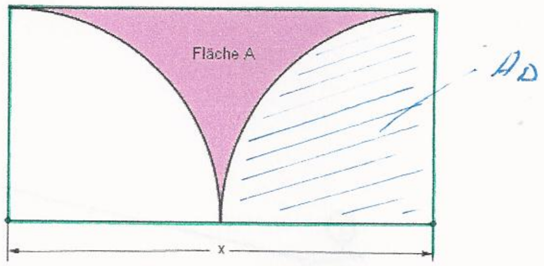
   (b) allgemein.

allg.: $\underline{A} = A_{\square} - 2 \cdot A_{D}$

$= x \cdot \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{(x/2)^2 \cdot \pi}{4}$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^2\pi}{8}$

$= \underline{\underline{x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right)}}$



4. Berechne den Inhalt der Fläche A:

   (a) für $x = 32$. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A = 402{,}124}}$

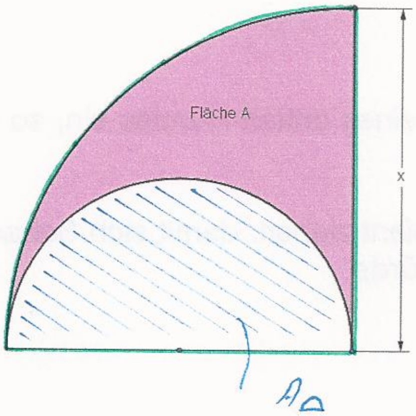
   (b) allgemein.

allg.: $\underline{A} = A_{D} - A_{\triangle}$

$= \frac{x^2\pi}{4} - \frac{(x/2)^2 \cdot \pi}{2}$

$= \frac{x^2\pi}{4} - \frac{x^2\pi}{8}$

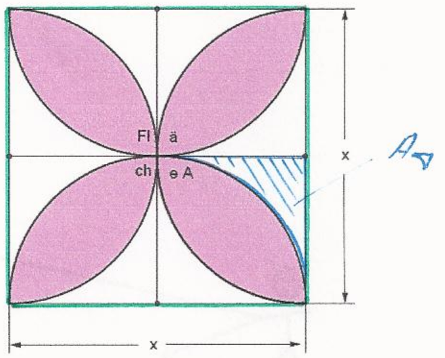
$= \underline{\underline{\frac{x^2\pi}{8}}}$



5. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche:

   (a) für $x = 40$. $\Rightarrow$ $A = 913.274$

   (b) allgemein.



allg.: $A = A_{\square} - 8\cdot A_{\triangle}$

$= x^2 - 8\cdot\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\pi}{4}\right)$

$= x^2 - 8\cdot\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2\pi}{16}\right)$

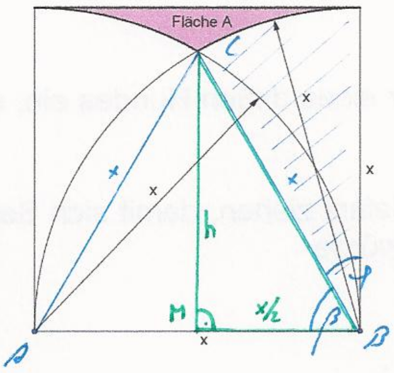
$= x^2 - 2x^2 + \frac{x^2\pi}{2}$

$= x^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

6. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche:

   (a) für $x = 12$. $\Rightarrow$ $A = 6.248$

   (b) allgemein.



allg.: • $\triangle ABC$ ist gl.seitig

$\Rightarrow \beta = 60°$

$\Rightarrow \varphi = 30°$

$\Rightarrow A_D = \frac{x^2\cdot\pi}{360°}\cdot\varphi = \frac{x^2\pi}{12}$

• $\triangle MBC$ ist $\triangle$

$\Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow A_\triangle = \frac{\frac{x}{2}\cdot h}{2} = \frac{x^2}{8}\sqrt{3}$

$\Rightarrow A = 2\cdot\left(\frac{x}{2}\cdot x - A_D - A_\triangle\right)$

$= 2\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2\pi}{12} - \frac{x^2}{8}\sqrt{3}\right) = x^2\left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(7) allg.: $A_{\triangle} = x^2 - \frac{x^2\pi}{4} - 2\cdot x^2\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

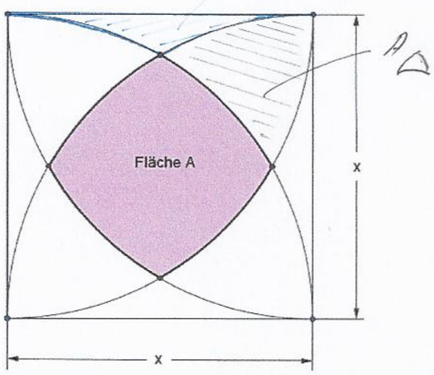
$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = x^2 - 4\cdot A_{\triangle} - 4\cdot A_{\triangledown}$$
$$= x^2 - 4\cdot\left(x^2 - \frac{x^2\pi}{4} - 2\cdot A_{\triangledown}\right) - 4\cdot A_{\triangledown}$$
$$= x^2 - 4x^2 + x^2\pi + 4\cdot A_{\triangledown}$$
$$= x^2\pi - 3x^2 + 4x^2\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = x^2\left(\pi - 3 + 4 - \frac{4\pi}{6} - \sqrt{3}\right) = \underline{\underline{x^2\left(1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)}}$$

7. Berechne den Inhalt der Fläche A:

(a) für $x = 20$. $\Rightarrow \underline{\underline{A = 126.055}}$

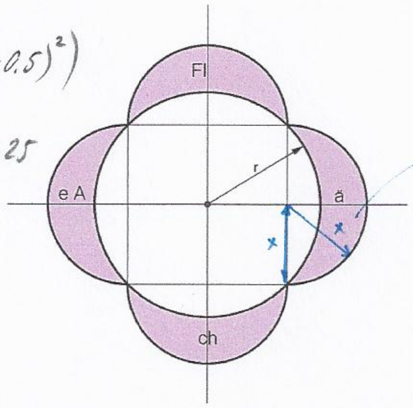
(b) allgemein.

Aufg. 6: $A_{\triangledown} = x^2\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$



8. (a) Berechne den Flächeninhalt der vier mondsichelähnlichen Figuren und vergleiche ihn mit dem Flächeninhalt des Quadrates. Verwende $r = 0.5$.

$$\underline{\underline{A}} = 4\cdot\frac{\left(\frac{0.5}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\pi}{2} - \left(0.5^2\cdot\pi - \left(\sqrt{2}\cdot 0.5\right)^2\right)$$
$$= 4\cdot 0.196 - 0.25\pi + 2\cdot 0.25$$
$$= \underline{\underline{0.5}}$$



$$\underline{x} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{r^2+r^2} = \frac{\sqrt{2}\cdot r}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

(b) Was dir auf?
Formuliere eine Vermutung und beweise sie.

Vermutung: Summe der Fläche aller Halbmöndchen = Fläche Quadrat.

Beweis:

• $4\cdot\frac{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\pi}{2} - \left(r^2\cdot\pi - \left(2\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 2\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\pi - r^2\cdot\pi + \frac{4r^2}{2} = \underline{2r^2}$

• $\left(2\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4r^2}{2} = \underline{2r^2}$

$\Rightarrow$ Vermutung ✓

17