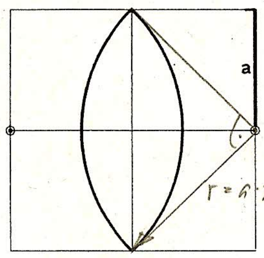
Geometrie-Aufgaben: *Kreisberechnungen 3*

1. Berechne die Längen der folgenden Kreislinien:

   (a) für $a = 4$.

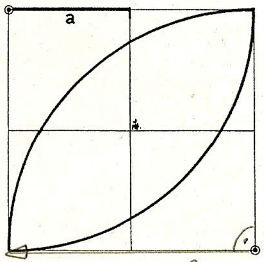
   (b) allgemein.



$r = a\cdot\sqrt{2} = 5{,}657$

$\Rightarrow \cdot\ \underline{U} = 2\cdot\dfrac{2\cdot 5{,}657\cdot\pi}{4} = \underline{\underline{17{,}772}}$

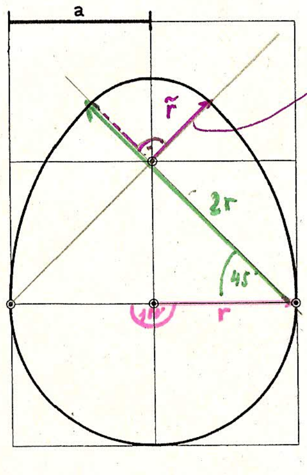
$\cdot\ \underline{U} = 2\cdot\dfrac{2\cdot a\sqrt{2}\cdot\pi}{4} = \underline{\underline{a\pi\cdot\sqrt{2}}}$



$r = 2a$

$\Rightarrow \cdot\ \underline{U} = 2\cdot\dfrac{2\cdot 8\cdot\pi}{4} = \underline{\underline{25{,}133}}$

$\cdot\ \underline{U} = 2\cdot\dfrac{2\cdot 2a\cdot\pi}{4} = \underline{\underline{2a\pi}}$



$\tilde{r} = 2r - r\cdot\sqrt{2}$

$= \underline{r(2-\sqrt{2})}$

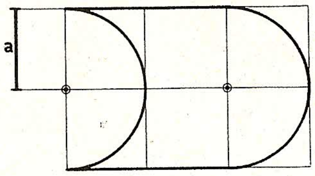
$\Rightarrow \cdot\ U = \dfrac{2r\cdot\pi}{2} + 2\cdot\dfrac{2\cdot 2r\cdot\pi}{8} + \dfrac{2\cdot(r\cdot(2-\sqrt{2}))\cdot\pi}{4}$

$= r\pi + r\pi + \dfrac{2r\pi - \sqrt{2}r\pi}{2}$

$= r\pi + r\pi + r\pi - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot r\cdot\pi$

$= \underline{\underline{r\pi\left(3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$

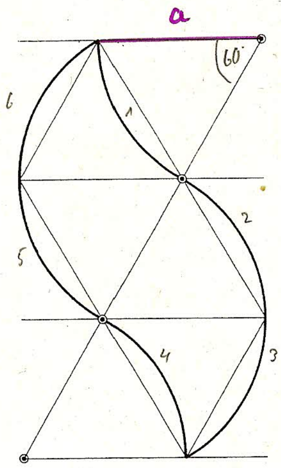
$\underline{\underline{U = 28{,}813}}$



$$\underline{U} = 2 \cdot \frac{2a \cdot \pi}{2} + 2 \cdot 2a$$

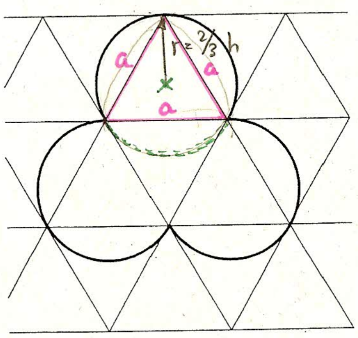
$$= 2a\pi + 4a = \underline{\underline{a(4+2\pi)}}$$

$\underline{\underline{U = 41{,}133}}$



$$\underline{U} = 6 \cdot \frac{2a \cdot \pi \cdot 60°}{360°} = \underline{\underline{2a\pi}}$$

$\underline{\underline{U = 25{,}133}}$



$\underline{h}$ = Höhe gl. seitigen Δ

$$= \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \underline{a/2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{r} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \underline{\frac{a}{3} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = \left(\frac{2 \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} \cdot \pi}{360°} \cdot 240°\right) \cdot 3$$

$$= \left(\frac{\frac{2a \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{3}}{3} \cdot 2\right) \cdot 3$$

$$= \frac{2a\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4a\sqrt{3} \cdot \pi}{3}}}$$

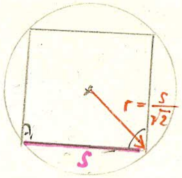
$\underline{\underline{U = 29{,}021}}$

(2) $U_O = U_\square + 2 \iff 2\cdot\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\pi = 4s+2$

$\iff s\sqrt{2}\cdot\pi - 4s = 2$

$\iff s(\sqrt{2}\cdot\pi - 4) = 2$

$\iff s = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\pi - 4} = \underline{\underline{4,516}}$



2. Der Umfang eines Kreises ist um 2 grösser als der des einbeschriebenen Quadrates.
   Bestimme die Länge der Quadratseite.

$U = 2r\pi = 9,43\cdot10^8$ km

↳ $\underline{\underline{r}} = 150'083'111,3$ km $= \underline{\underline{150 \text{ Mio. km}}}$

3. (a) Die Erdbahn ist näherungsweise ein Kreis mit einem Umfang von $9,43 \cdot 10^8 km$
   i. Wie weit ist somit der erdnächste Stern von uns entfernt?
   ii. Wie gross ist die Durchschnittsgeschwindigkeit (in km/s) der Erde bei ihrem Lauf um die Sonne?

   (1 Jahr = 365 Tage)

   $\underline{\underline{29,902 \text{ km/s}}}$

   (b) Pluto, der äusserste Planet unseres Sonnensystems, bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von $4,75 km/s$ in 248 Jahren um die Sonne.
   Wie gross ist der Durchmesser unseres Sonnensystems, wenn wir die Bahn des Plutos als dessen Rand betrachten?

   $\Rightarrow U = 3,7145\ldots\cdot10^{10} = d\cdot\pi$

   $\Rightarrow \underline{\underline{d = 1,183\cdot10^{10} \text{ km}}}$

Spur eines Rades = $2\pi r\cdot a$ (a = Auflagebreite)

Beh.: mit $a = \frac{1}{2}r$ gilt $2\pi r\cdot a = r^2\pi$

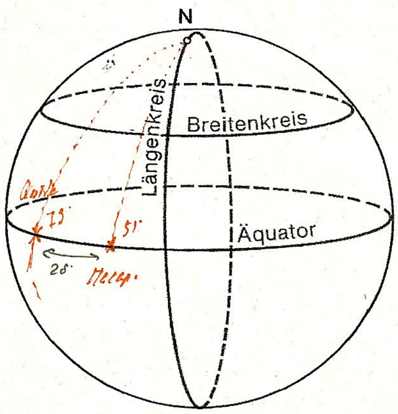
Beweis: Verif.

4. Leonardo PISANO, genannt FIBONACCI (ital. Mathematiker; 1180 bis 1240) ht folgende Behauptung aufgestellt:

   Die Spur eines Rades bei einer Umdrehung ist gleich dem Kreisinhalt, wenn die Auflagebreite halb so gross wie der Radius ist.

   Was ist von dieser Behauptung zu halten?

5. In Südamerika liegen die Städte Quito (Westküste) und Macapá (Ostküste) auf dem Äquator. Macapá liegt etwa auf dem 51., Quito etwa auf dem 79. Längenkreis westlicher Länge.
   Wie weit sind die beiden Städte voneinander entfernt?



Erdradius$_{\text{Äquator}}$ $= 6,3782\cdot10^6$ m

$= 6'378'200$ m

$= 6'378,2$ km

$\Rightarrow$ Kreisbogen mit $\alpha = 28°$: $\frac{2\cdot 6'378,2 \text{ km}\cdot\pi\cdot 28°}{360°} = \underline{\underline{3'116,977 \text{ km}}}$

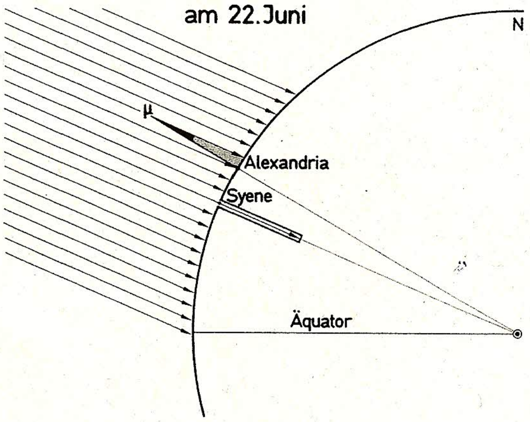
Vergl Eratosthenes Projekt

6. Der griechische Mathematiker ERATOSTHENES (Alexandrien; 275 bis 194 v.hr.) hat den Erdumfang mit folgender Überlegung bestimmt:

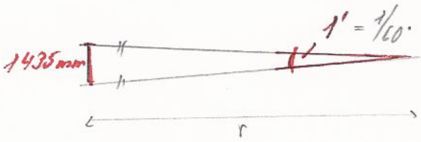
   Wenn in Syene (haute Assuan) die Sonne zur Sommerwende (höchster Sonnenstand) eine tiefen Brunnen genau ausleuchtet, also senkrecht über Syene steht, dann wirft eine Säule im 800km nördlich gelegenen Alexandrien einen Schatten. Nimmt man an, dass die Sonnenstrahlen parallel sind, dann folgt daraus, dass die Erdoberfläche krumm sein muss.

   Wenn Eratosthenes weiter annimmt, dass die Erde eine Kugel ist, dann kann er aus dem Winkel μ, den die Sonnenstrahlen und die Säule bilden, Umfang und Radius der Erdkugel bestimmen; für μ gibt er 'ein Fünfzigstel von ~~einem~~ vier Rechten' an.

   Welcher Wert ergibt sich für den Umfang und welcher für den Radius? (Verwende $\pi \approx 22/7$.)



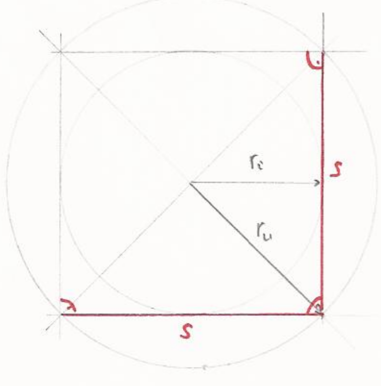
7.



$\Rightarrow$ "Gesamtumfang" $= 60 \cdot 360° \cdot 1435\,mm = \underline{30'996\,m} \overset{!}{=} 2r\pi$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{r = 4933{,}167\,m}}$

8. a)



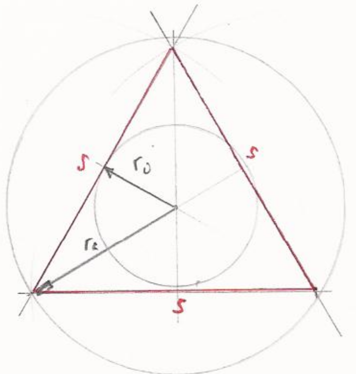
$r_i = s/2 \Rightarrow U_i = 2r_i\pi = s\pi \quad , \quad A_i = r_i^2\pi = \frac{s^2}{4}\cdot\pi$

$r_a = s/\sqrt{2} \Rightarrow U_a = 2\cdot r_a\pi = \sqrt{2}\,s\cdot\pi \quad , \quad A_a = r_a^2\pi = \frac{s^2}{2}\cdot\pi$

$\Rightarrow \underline{\underline{U_a : U_i = \sqrt{2} : 1}}$

$\underline{\underline{A_a : A_i = 2 : 1}}$

b)



$r_i = 1/3 \cdot s/2\,\sqrt{3} = \frac{s}{2\sqrt{3}} \Rightarrow U_i = \frac{s}{\sqrt{3}}\cdot\pi \quad , \quad A_i = \frac{s^2\cdot\pi}{12}$

$r_a = 2/3 \cdot s/2\,\sqrt{3} = \frac{s}{\sqrt{3}} \Rightarrow U_a = \frac{2s\pi}{\sqrt{3}} \quad , \quad A_a = \frac{s^2\pi}{3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{U_a : U_i = 2 : 1}}$

$\underline{\underline{A_a : A_i}} = 1/3 : 1/12 = \underline{\underline{4 : 1}}$

(9) Leine Tag 1 = 4m = r_1 $\Rightarrow$ tägliche Fläche = $r_1^2 \cdot \pi$

für Tag 2: $A_2 = 2 \cdot A_1 = 2r_1^2 \cdot \pi$ $\Rightarrow$ $r_2 = \sqrt{2} \cdot r_1$

$\Rightarrow$ Verlängerung $v_2 = r_2 - r_1 = (\sqrt{2} - 1)\, r_1$

für Tag 3: $A_3 = 3 \cdot A_1 = 3r_1^2 \pi$ $\Rightarrow$ $r_3 = \sqrt{3}\, r_1$

$\Rightarrow$ Verlängerung $v_3 = r_3 - r_2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot r_1$

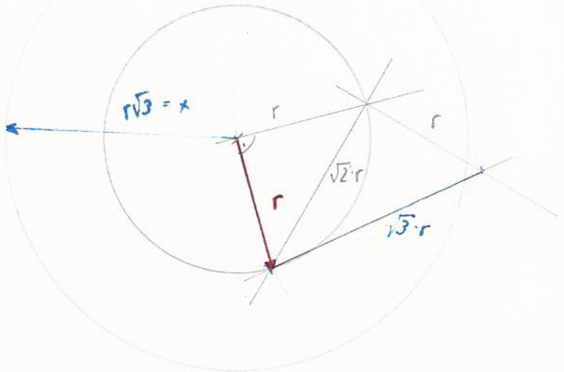
$\vdots$

$\Rightarrow$ Verlängerung Tag n: $\underline{\underline{v_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot r_1}}$

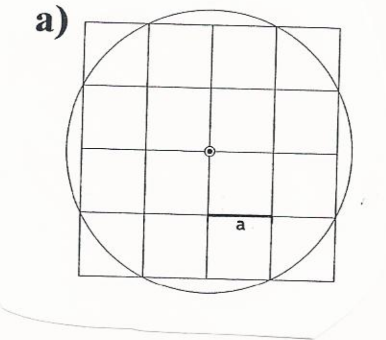
(10) Fläche "Verdreifachen":

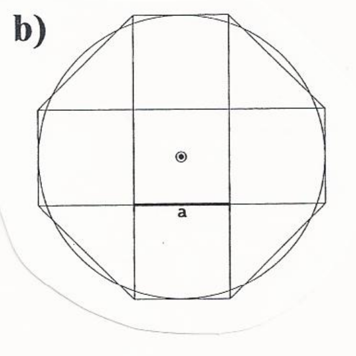
$r^2\pi \longrightarrow x^2\pi$, mit $x^2\pi = 3 \cdot r^2\pi$

$\Rightarrow$ $\underline{x = \sqrt{3} \cdot r}$



(11)





$U_{\square} = 16a$, $U_{\bigcirc} = 2a\sqrt{5} \cdot \pi = 14{,}050a$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{U_{\square} > U_{\bigcirc}}}$

$U_{\odot} = 4a(1+\sqrt{2}) = 9{,}657$, $U_{\bigcirc} = 3a\pi = 9.425a$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{U_{\odot} > U_{\bigcirc}}}$

$A_{\square} = 16a^2$, $A_{\bigcirc} = 5a^2\pi = 15{,}708a^2$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{A_{\square} > A_{\bigcirc}}}$

$A_{\odot} = 7a^2$, $A_{\bigcirc} = 2.25a^2\pi = 7{,}069a^2$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{A_{\bigcirc} > A_{\odot}}}$