Trigonometrie Teil 1 & 2

mit etwas Pythagoras-Repetition

Geometrie

Kapitel 3

MNProfil - Gymnasiale Mittelstufe , M3d FS23

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

24. Mai 2023

Die *QR* - Codes
zur *Trigonometrie*
MNProfil

zum aktuellen Skript

zur Homepage

zur Übersicht *Geometrie*

zur Trigonometrie

zu den Aufgaben & Lösungen

Überblick über die bisherigen *GEOMETRIE* - Themen:
(in den MNProfil-Versionen)

Inhaltsverzeichnis

3 Trigonometrie - 1.Teil
Im rechtwinkligen Dreieck & am Einheitskreis

3.1 Repetition der Satzgruppe des Pythagoras

3.1.1 Ähnlichkeit

Def.: Zwei geometrische Figuren A und B heissen **ähnlich** $:\Leftrightarrow$
es existiert eine *Ähnlichkeitsabbildung*, welche A auf B abbildet.

Bem. :

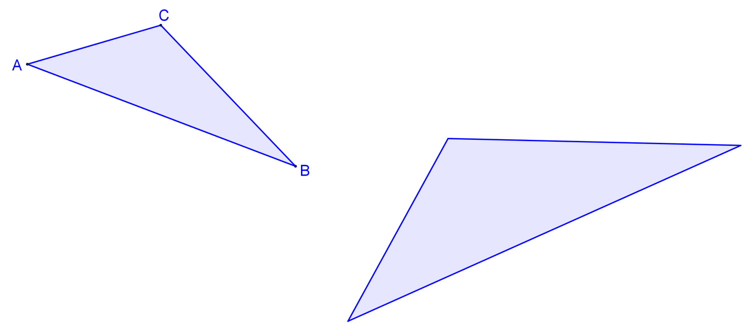
- *Schreibweise:* $A \sim B$
- Eine *Ähnlichkeitsabbildung* ist eine Verknüpfung von zentrischen Streckungen mit Kongruenzabbildungen.
  Kongruenzabbildungen kennen wir schon;
  -
  -
  -
  -

  Diese zeichnen sich aus durch :

während bei einer zentrischen Streckung ...

3.1.2 Ähnlichkeit im Dreieck

Für Dreiecke gelten die folgenden *Ähnlichkeitssätze*, die wir hier ohne Beweis zusammenstellen:



1. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei Winkel übereinstimmen.

2. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

3. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

4. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite übereinstimmen.

3.1.3 Die Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras

Die Satzgruppe besteht aus folgenden Sätzen:

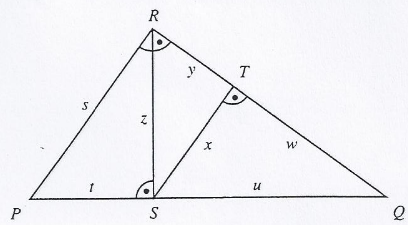
-
-
-

und die Voraussetzung *für alle* Sätze ist

3.1.4 *Ein* Beweis für den Satz des Pythagoras

Aufgaben 3.1 *Präsentiere eine alternative Beweisführung.*

Ein Überblick über die Anwendungen:



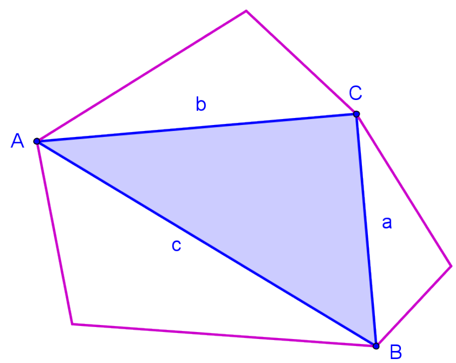
Abkürzungen:

P: Satz des *Pythagoras*
H: Höhensatz
K: Kathetensatz

Beispiel:

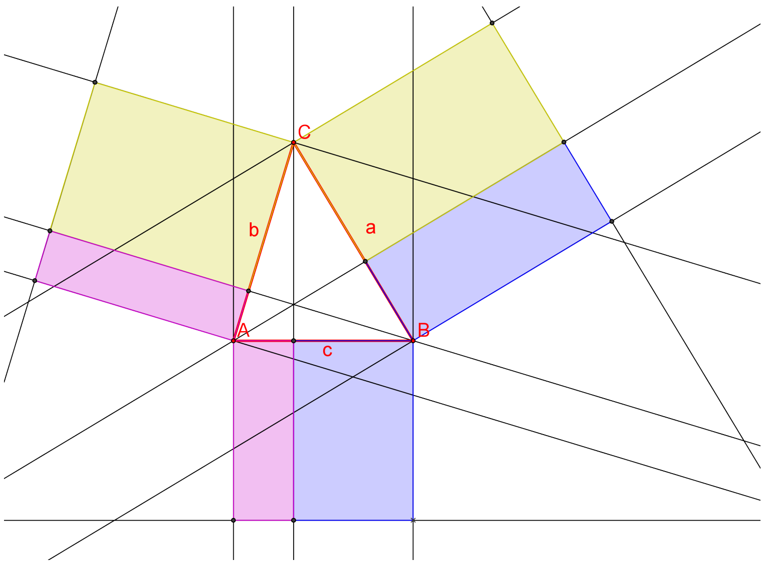
	$u^2 = w^2 + \square$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
1.	$u^2 = w \cdot \square$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
2.	$u = z^2 : \square$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
3.	$u = \sqrt{\square - z^2}$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
4.	$x^2 = \square - y^2$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
5.	$x^2 = \square \cdot y$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
6.	$y = z^2 : \square$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
7.	$y = \sqrt{z^2 - \square}$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
8.	$y = \square : w$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
9.	$s^2 = \square + z^2$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
10.	$s^2 = (t + u)^2 - \square$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
11.	$s^2 = t \cdot \square$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
12.	$w = z^2 : \square - y$	nach $\square$	im Dreieck $\square$
13.	$w = \sqrt{(u + t) \cdot \square} - y$	nach $\square$	im Dreieck $\square$

Zur Verallgemeinerung auf zueinander ähnliche Figuren:

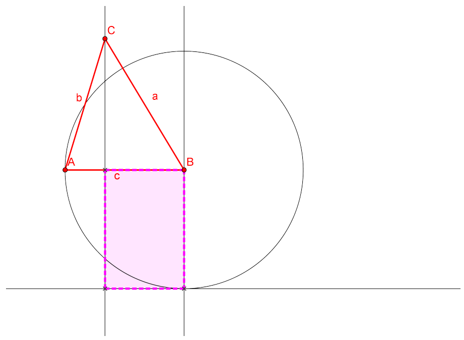


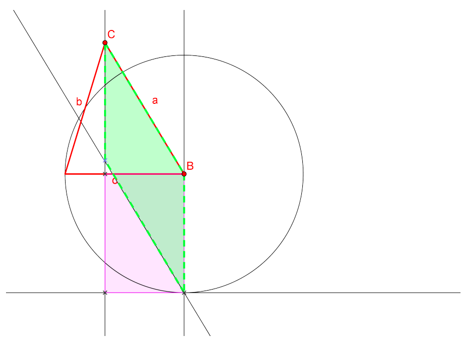
3.1.5 Die Verallgemeinerungen auf *nicht-rechtwinklige Dreiecke:*

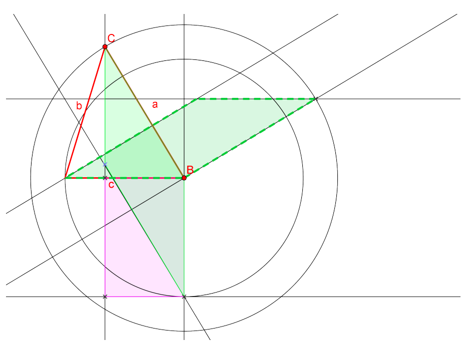
im Fall γ = spitz

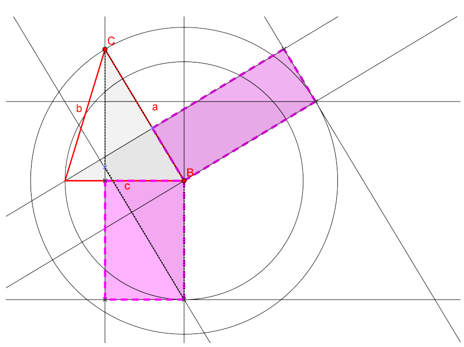


<u>Beweis:</u>









Aufgaben 3.2 *Arbeite den Fall γ = stumpf selbständig durch und beweise*

$$c^2 = a^2 + b^2 + aa_b + bb_a$$

Noch zwei Links zu *Repetitionsaufgaben* (mit Lösungsweg) zum Thema

Satzgruppe des Pythagoras:

zum selber Zusammenstellen: https://smart.uni-bayreuth.de/
schon zusammengestellt: Repetionsserie zur Satzgruppe des Pythagoras

3.2 Warum Trigonometrie

In der *Trigonometrie* (von griechisch trigonon - Dreieck und métron - Mass) werden wir uns mit der Berechnung von Seiten und Winkeln in einem Dreieck befassen.

Im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks lassen sich mit Hilfe des *Satzes von Pythagoras* schon einige Aufgaben exakt lösen:

Beispiel 3.1 In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC sind die Länge der Hypotenuse $c = 6$ und die Länge einer Kathete $b = 3.7$ bekannt.
Konstruiere das Dreieck ΔABC und berechne die Länge der zweiten Kathete und die Höhe des Dreiecks ΔABC.

Doch schon für die Bestimmung der Winkelöffnungen sind wir auf wenig genaue Hilfsmittel angewiesen:

Durch das Konstruieren mit Zirkel und Lineal und dem Bestimmen der Winkelöffnung mit Hilfe des Geodreiecks schleichen sich Fehler ein, die wir später durch die Anwendung trigonometrischer Berechnungsmethoden werden verhindern können.
Zu dem sind wir bei unseren bisherigen Berechnungen, um den Satz des Pythagoras überhaupt anwenden zu können, auf die Existenz eines rechten Winkel angewiesen und auch auf die Angabe der richtigen Dreiecksteile:

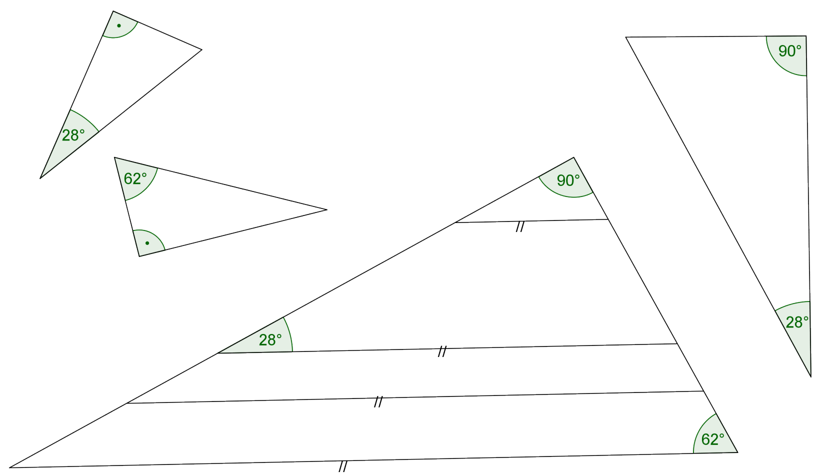
Beispiel 3.2 In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC sind die Länge der Kathete mit $a = 5.5$ und die Öffnung des Winkels mit $\alpha = 63^0$ bekannt.
Konstruiere das Dreieck ΔABC und berechne die Längen der übrigen Seiten und die Grösse des fehlenden Winkels.

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen werden wir später auch diese Aufgabe (und ähnliche) exakt lösen können.

3.3 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Wir beginnen mit den trigonometrischen Beziehungen im *rechtwinkligen Dreieck* und untersuchen dazu die folgenden Dreiecke auf Gemeinsamkeiten:

Was haben die folgenden Dreiecke gemeinsam ?



Wir fassen zusammen:

<u>Def.:</u> In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den *üblichen* Bezeichnungen werden die trigonometrischen Funktionen wie folgt definiert:

$\sin\alpha :=$

$\cos\alpha :=$

$\tan\alpha :=$

<u>Bem.:</u>

- $\sin\beta :=$
- $\cos\beta :=$
- $\tan\beta :=$

... und wir können schon die ersten Beziehungen zwischen sin und cos (in einem rechtwinkligen Dreieck) formulieren:

Aufgaben 3.3 *Bestimme mit dem Taschenrechner die folgenden Werte:*

1. *den Sinus von* $13^0,\ 76.5^0,\ 65829^0$*,*

2. *den Cosinus von* $77^0,\ 43.9^0,\ -54^0$*,*

3. *den Tangens von* $2^0,\ 37.88^0,\ -812^0$*,*

4. *den Winkel mit dem zugehörigen Sinuswert* $0.8,\ 0.2,\ -0.6$*,*

5. *den Winkel mit dem zugehörigen Cosinuswert* $0.8,\ 0.2,\ 2.1$*,*

6. *den Winkel mit dem zugehörigen Tangenswert* $0.8,\ 0.2,\ 2.1$.

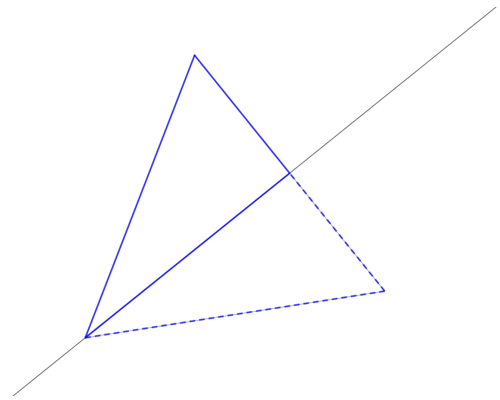
Bestimme die folgenden Werte mit dem TR:

α	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
cos	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
tan	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

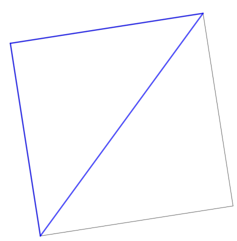
Die Werte aus der obigen Tabelle lassen sich auch *exakt* berechnen, was wir auf der folgenden Seiten machen wollen:

Aufgaben 3.4 *Die Herleitung* exakter *trigonometrischen Werte* ...

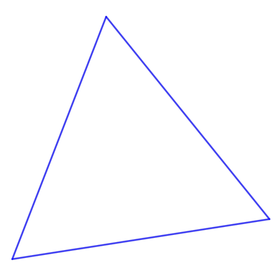
Wir schauen uns gemeinsam die Herleitung von $\sin 30^0$ *an:*



Leite selbständig her: $\cos 45^0$



Leite selbständig her: $\tan 60^0$



Aufgaben 3.5 *Bestimme* exakt

- $\tan 30^0$:

- $\sin 45^0$:

- $\cos 60^0$:

3.4 Standardaufgaben

Für die folgenden Aufgaben arbeiten wir wieder in einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den üblichen Bezeichnungen:

Aufgaben 3.6 *Gegeben sind:* $c = 5.6 \ \wedge \ \beta = 38.5^0$.

1. *Skizziere die Situation,*
2. *konstruiere das Dreieck* ΔABC *mit* GeoGebra*,*
3. *berechne die Seiten* a *und* b*.*

Aufgaben 3.7 *Gegeben sind:* $b = 4.8 \ \wedge \ \alpha = 38.5^0$.

1. *Skizziere die Situation,*
2. *konstruiere das Dreieck* ΔABC *mit* GeoGebra*,*
3. *berechne die Seiten* a *und* c.

Aufgaben 3.8 *Gegeben sind:* $a = 10.74 \ \wedge \ b = 6.48$.

1. *Skizziere die Situation,*
2. *konstruiere das Dreieck* ΔABC *mit* GeoGebra*,*
3. *berechne die Seite* c *und die Winkel* α *und* β.

Aufgaben 3.9 *Berechne die in den Beispielen 3.1 und 3.2 gemessenen Grössen.*

Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie 1*
(Zugehörige Lösungen)

Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie 2, mit Anwendungen im Kreis*
(Zugehörige Lösungen)

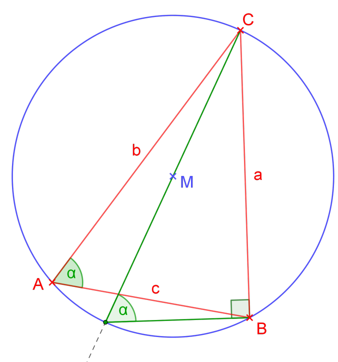
Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie Vereinfachungen*
(Zugehörige Lösungen)

Aufgaben 3.10 *Repetiere die Zusammenhänge von* Zentriwinkel, Peripheriewinkel *und* Sehnentangentenwinkel ...

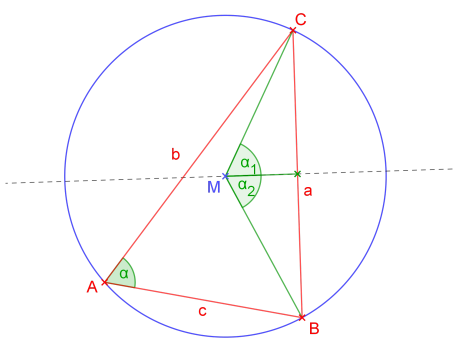
und leite den folgenden Zusammenhang her:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2 \cdot r_{Umkreis}$$

Tipp A



Tipp B

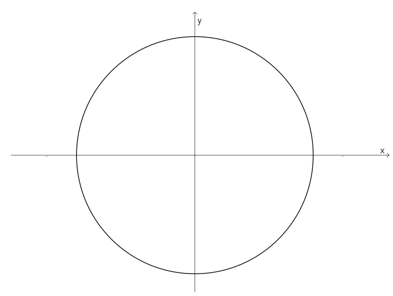


3.5 Trigonometrie am Einheitskreis

In diesem Abschnitt werden wir den *Einheitskreis* einführen und an ihm die trigonometrischen Beziehungen neu definieren. Wir werden ihn als praktisches Hilfsmittel kennenlernen und festellen, ...

- dass die bisherigen Definitionen (im rechtwinkligen Dreieck) auch weiterhin Gültigkeit haben,
- dass wir die trigonometrischen Funktionen nicht nur auf Winkel zwischen 0^0 und 90^0 anwenden können und
- dass es einige interessante Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen gibt.

Der Einheitskreis:

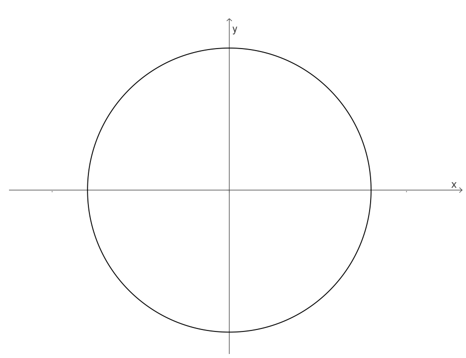


<u>**Def.:**</u> $\cos\varphi$:= x-Koordinate von P

$\sin\varphi$:= y-Koordinate von P

$\tan\varphi$:= Quotient der y- & der x-Koordinate von P

<u>*Eine Veranschaulichung und der Vergleich mit den „alten" Definitionen:*</u>



Verwende den Einheitskreis:

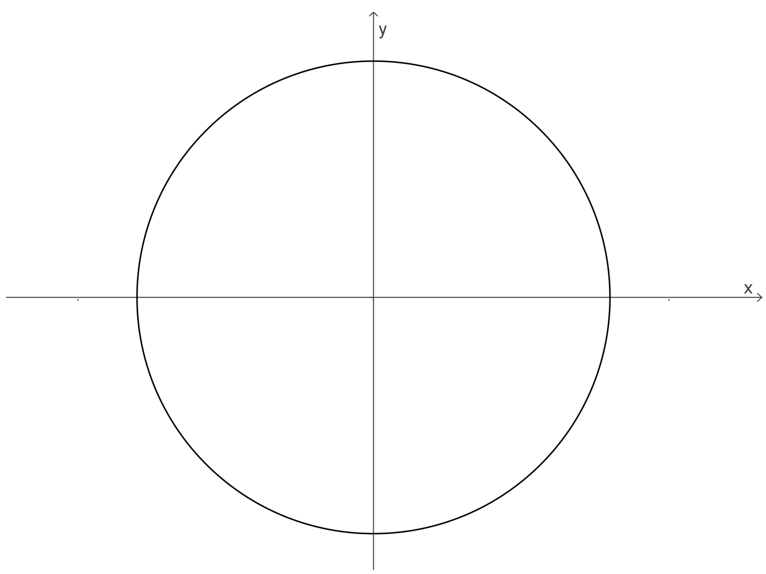
Beispiel 3.3 Bestimme die folgenden Werte:

φ	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin	...	...	...	...	...
cos	...	...	...	...	...
tan	...	...	...	...	...

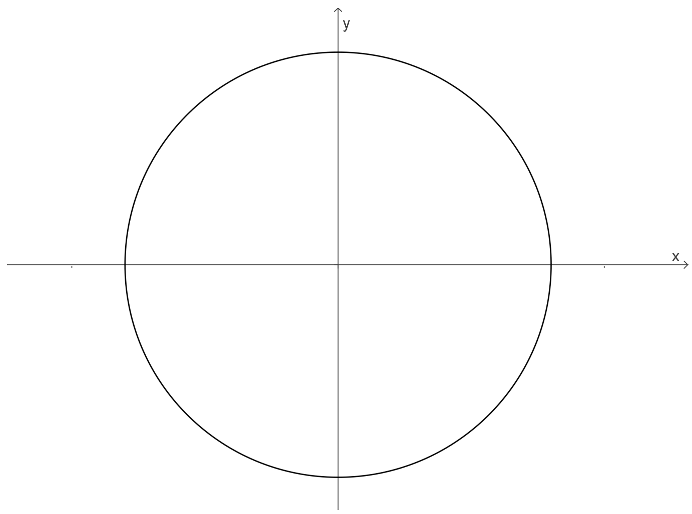
und beweise die folgenden Aussagen:

Beispiel 3.4 Beweise im 1. Quadranten:

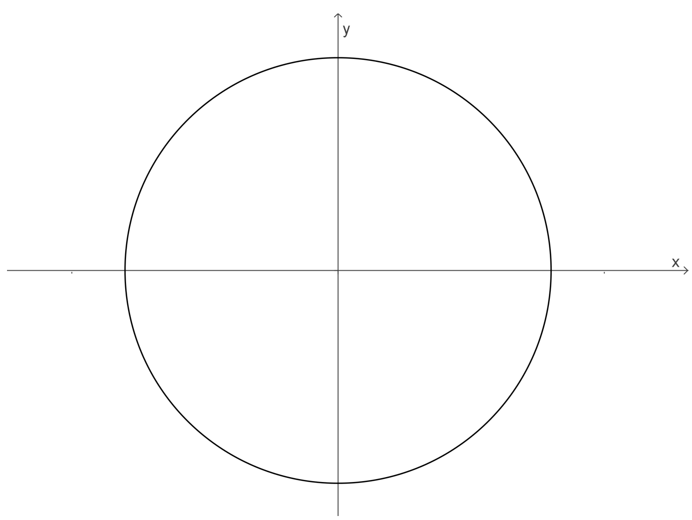
- $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$
- $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$



Beispiel 3.5 Beweise im 2. Quadranten: $\sin\varphi = \cos(\varphi - 90^0)$



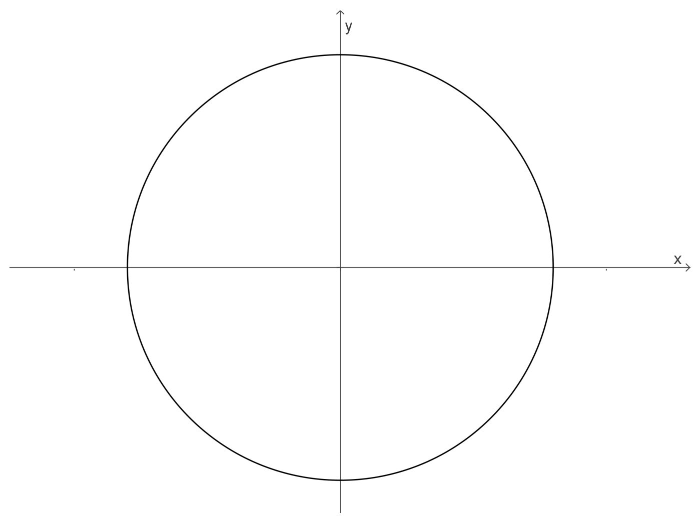
Beispiel 3.6 Beweise im 3. Quadranten: $\cos\varphi = \sin(90^0 - \varphi)$



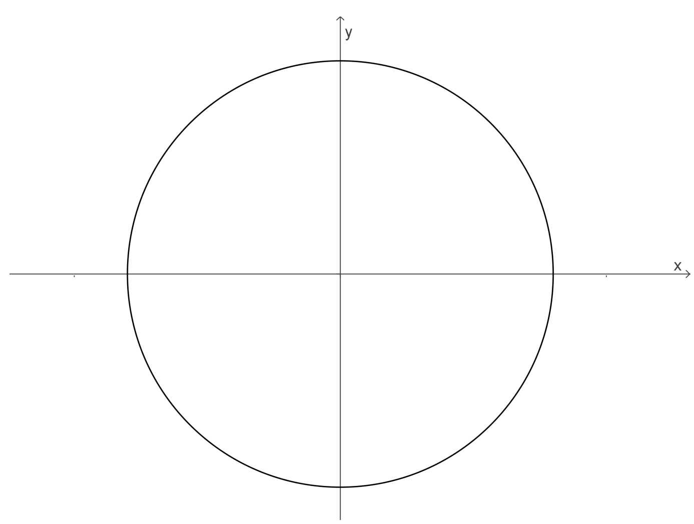
Zugehörige *ggb-files* sind zu finden unter https://ronaldbalestra.ch/geometrie/trigonometrie/

Aufgaben 3.11

1. Verifiziere Beispiel 3.4 im 2. Quadranten,
2. Verifiziere Beispiel 3.5 im 3. Quadranten,

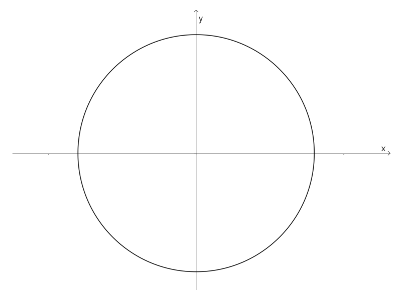


3. Verifiziere Beispiel 3.6 im 4. Quadranten
4. Verifiziere die Definition des Tangens im 2. Quadranten.

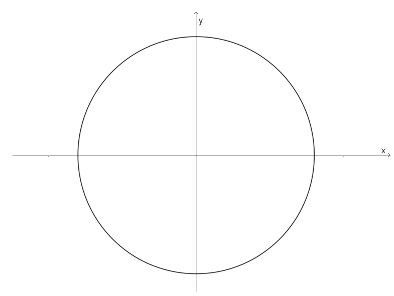


Mit Hilfe des Einheitskreises lassen sich viele weitere Beziehungen und Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen erkennen:

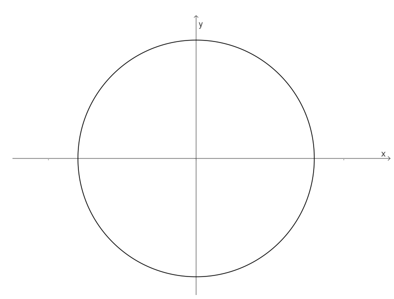
- Für welche Winkel ist der *sin*-Wert negativ ?



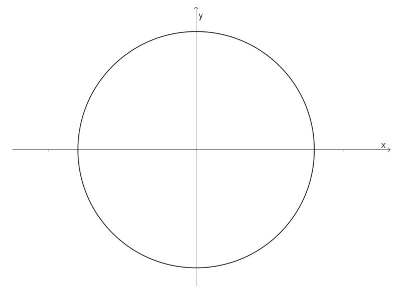
- Für welche Winkel ist der *cos*-Wert > 0.5 ?



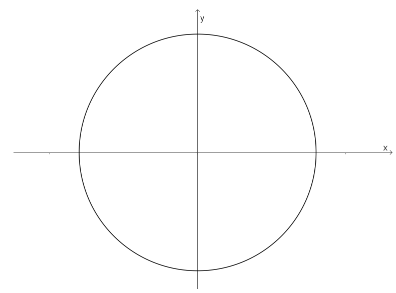
- Für welche Winkel ist der *sin*-Wert > 1.5 ?



- Für welche Winkel ist der tan-Wert positiv ?

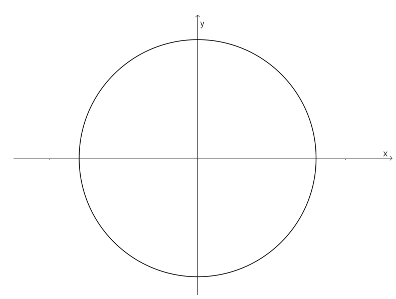


- Für welche Winkel erhalten wir den selben sin-Wert ?



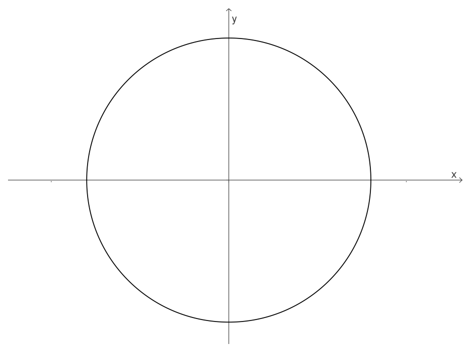
und aus dem Verhalten der x-Koordinaten können wir schliessen:

- Für welche Winkel erhalten wir denselben cos-Wert ?

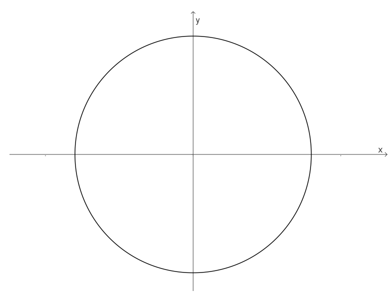


und aus dem Verhalten der y-Koordinaten können wir schliessen:

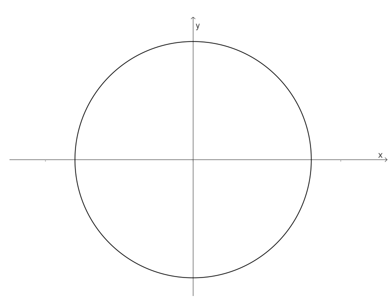
Aufgaben 3.12 *Überprüfe die obigen Aussagen für negative Argumente:*



Aufgaben 3.13 *Was für Beziehungen zwischen sin und cos lassen sich mit Hilfe des 1. & 3. Quadranten bestimmen ?*



Aufgaben 3.14 *Formuliere eigene Beziehungen zwischen sin und cos.*

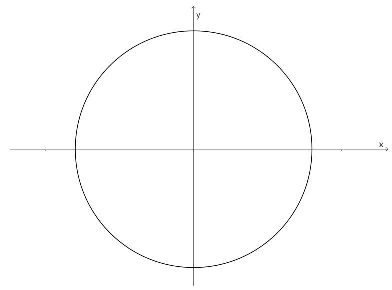


Wir wollen uns abschliessend noch mit dem Tangens beschäftigen:

Nach Definition gilt für den Tangens: $\tan\psi := \dfrac{\sin\psi}{\cos\psi}$

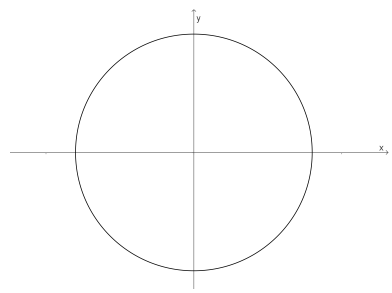
im 2. Quadranten:

$\tan\psi \ =$



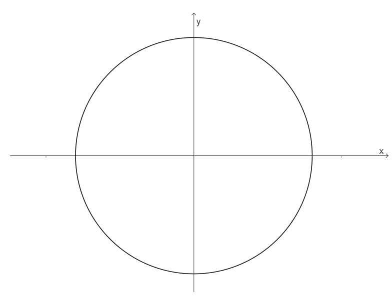
im 3. Quadranten:

$\tan\psi \ =$



im 4. Quadranten:

$\tan\psi \ =$



Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie 3, 1. Seite*
(Zugehörige Lösungen)
(zugehörige Lösungen mit Weg von Cyrill Püntener)

3.6 Das Bogenmass & die Graphen der trigonometrischen Funktionen

Neben der Darstellung der Argumente der trigonometrischen Funktionen im *Gradmass* ist auch die Darstellung im sog. *Bogenmass* üblich. Wir verwenden als Grundlage den Zusammenhang zwischen dem Umfang des Einheitskreises und der zugehörigen Winkelöffnung:

... und definieren:

Aufgaben 3.15 *Stelle die Aufgabe im Bogenmass dar und berechne exakt den zugehörigen Funktionswert:*

1. $\sin 30^0$
2. $\cos 120^0$
3. $\tan 90^0$

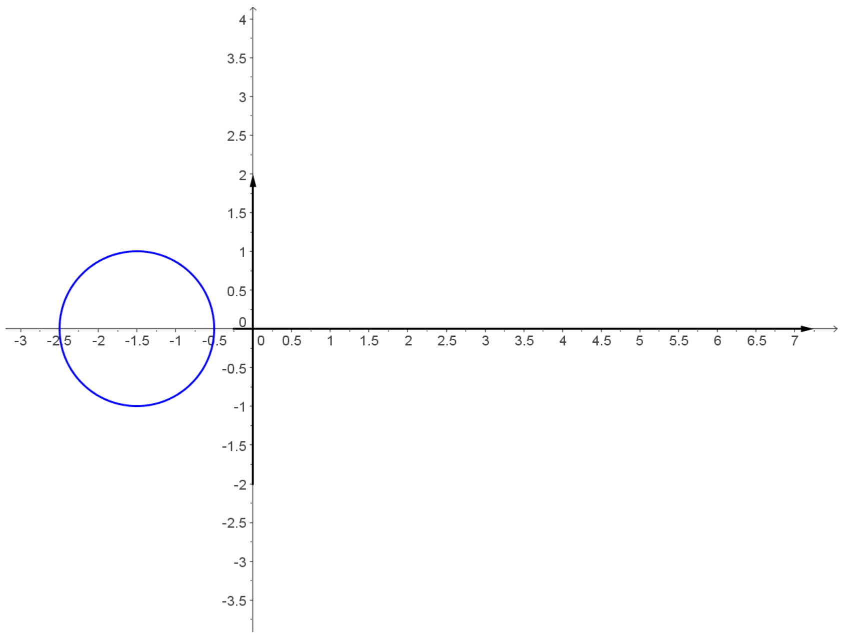
Aufgaben 3.16 *Stelle die Aufgabe im Gradmass dar und bestimme exakt den zugehörigen Funktionswert:*

1. $\sin \frac{\pi}{2}$
2. $\cos -\frac{\pi}{6}$
3. $\tan \frac{2\pi}{3}$

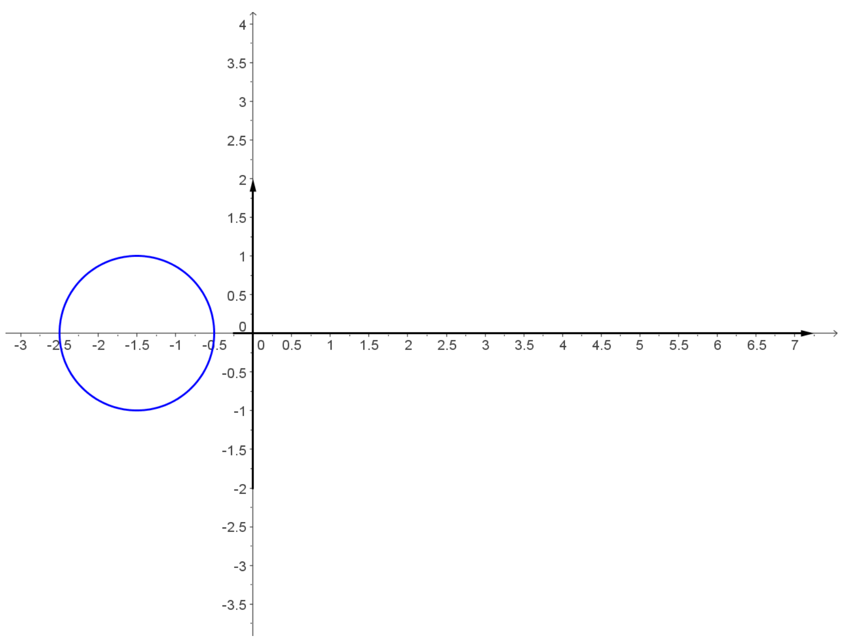
Aufgaben 3.17 *Verifiziere deine Resultate mit dem TR.*

Die *graphischen Darstellungen* von sin, cos & tan:

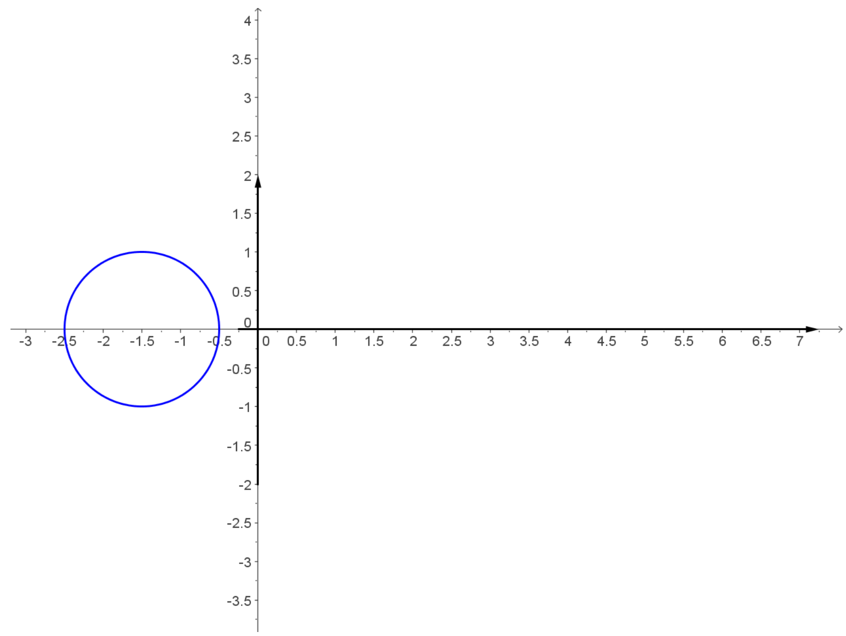
- für den Sinus:



- für den Cosinus:



- für den Tangens:



Siehe dazu auch ein *ggb-file* von Andreas Lindner:

Aufgaben 3.18 *Untersuche den Einfluss der Parameter in der Funktion*

$$f(x) = a \cdot \sin(bx - \varphi)$$

auf die Sinuskurve.

Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie 3, 2. Seite*
(Zugehörige Lösungen)
(zugehörige Lösungen mit Weg von Cyrill Püntener)

3.7 Astrometrie - ein WebQuest

Die *Astrometrie* beschäftigt sich mit den geometrischen Methoden der Distanzbestimmung in der Astronomie.
In diesem *WebQuest* werdet ihr euch dazu in Gruppen mit den folgenden Themen auseinandersetzen:

3.7.1 Längen- & Winkelmessgeräte

Die Entwicklung und Anwendung verschiedener Messgeräte.

3.7.2 Die alten Griechen

Das Wissen über die Entfernungen in unserem Sonnensystem vor der Zeit Keplers.

3.7.3 Kepler & seine Gesetze

Seine Gestze und die Anwendung auf die Entfernungsbestimmungen

3.7.4 Sinus- und Cosinussatz

Die Verallgemeinerung der trigonometrischen Bezieheung auf beliebige Dreiecke.

3.7.5 Der Venustransit

Die Bestimmung der Distanz Erde-Sonne

3.7.6 Radioastronomie

Moderne Methoden der Entfernungsbestimmung

3.8 Der Normwürfel

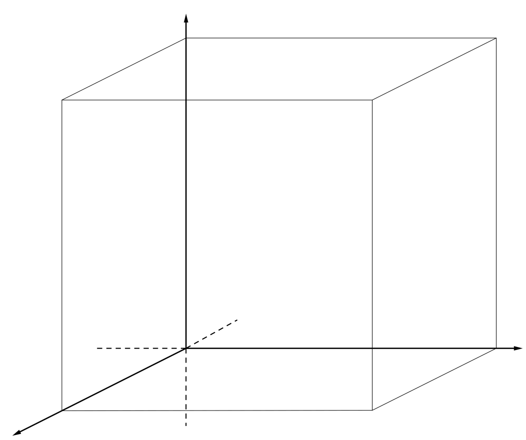
Wir wollen uns etwas mit dem 3-dimensionalen *Raum* $\mathbb{R}^3$ vertraut machen ...

- mit einer kleinen Übung für das *räumliche Vorstellungsvermögen*,
- einer Repetition des *Satzes des Pythagoras*

  und
- etwas *Trigonometrie*:

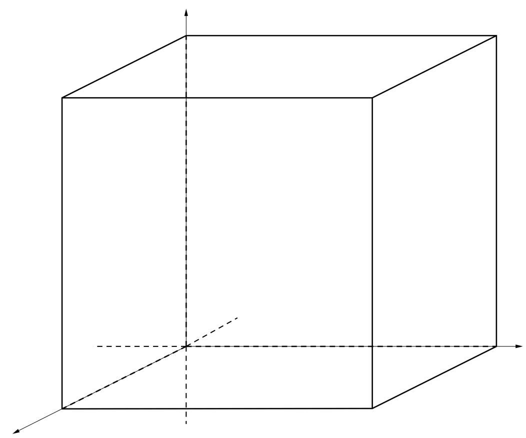
3.8.1 Das Kennenlernen des Normwürfels

Die zentrale Eigenschaft ist ...

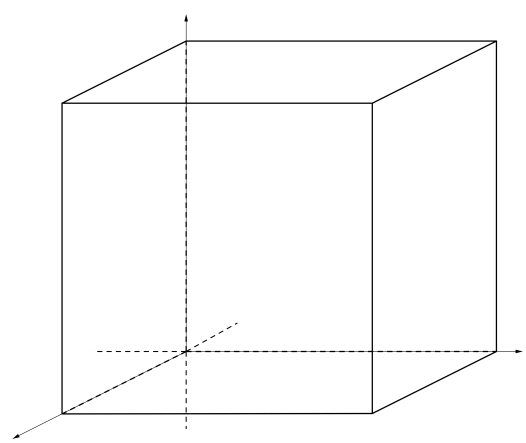


- Markiere alle sichtbaren/ nicht-sichtbaren Kanten,
- Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte,
- Zeichne alle rechten Winkel ein.

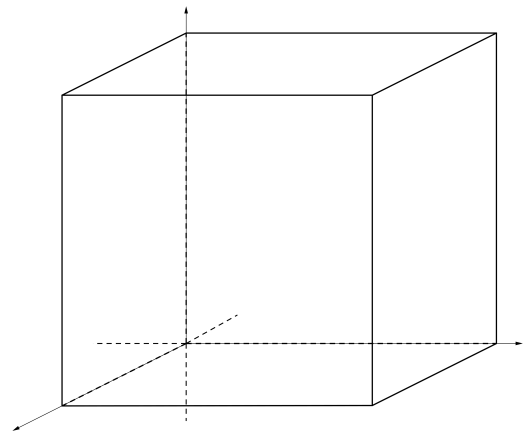
- Zeichne die folgenden Punkte ein:
  - $A = (0.5/0/0)$
  - $B = (0/1/0.25)$
  - $C = (1/0.5/1)$
  - $D = (0.25/0.5/1)$
  - $E = (0.8/0.8/0.8)$



- Bestimme die Koordinaten eines Punktes
  - in der Grundfläche,
  - in der Deckfläche,
  - in der xz-Ebene,
  - in der yz-Ebene,
  - innerhalb des Würfels,
  - ausserhalb des Würfels.



3.8.2 Das Bestimmen von Streckenlängen

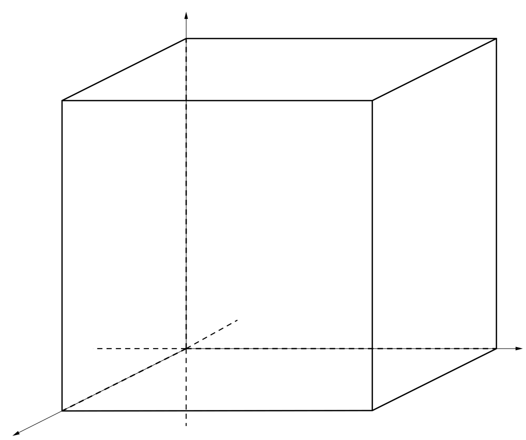


- Zeichne die folgenden Punkte ein

  $A = (1/0/0)$ $B = (0/1/0)$
  $C = (1/1/0.5)$ $D = (0.8/1/1)$
  $E = (0/0.2/1)$

  und berechne die Länge folgender Strecken:

  - $\overline{AB}$
  - $\overline{AC}$
  - $\overline{CD}$
  - $\overline{DE}$



- Zeichne die folgenden Punkte ein

  $A = (1/0/0)$ $B = (1/1/0)$
  $C = (0.5/0/0)$ $D = (0.5/1/0.2)$
  $E = (0.2/0/0.8)$ $F = (0/0/1)$

  und berechne die Länge folgender Strecken:

  - $\overline{AD}$
  - $\overline{CE}$
  - $\overline{BF}$
  - $\overline{BD}$
  - $\overline{DE}$

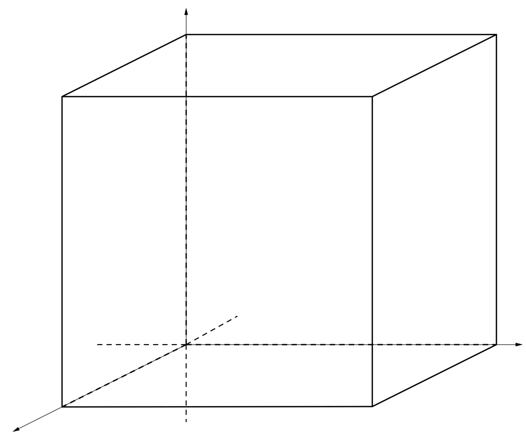
3.8.3 Das Bestimmen von Flächeninhalte

- Zeichne die folgenden Punkte ein

$A = (1/0/0)$	$B = (1/1/0)$
$C = (0/0/0)$	$D = (0/1/0)$
$E = (1/0/1)$	$F = (1/1/1)$
$G = (0/0.8/1)$	$I = (0/1/0.8)$

  und berechne den Inhalt folgender Dreiecke:

  - ΔACE
  - ΔBDI
  - ΔEFG

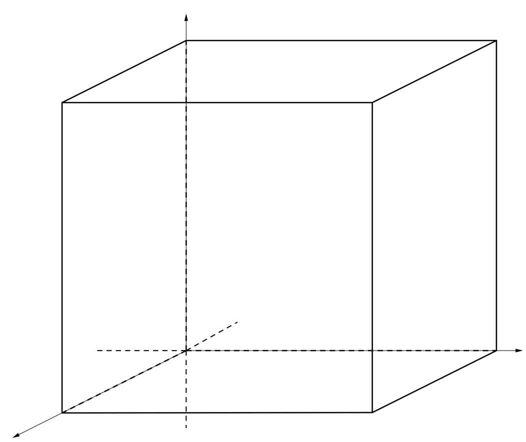


- Zeichne die folgenden Punkte ein

$A = (1/0/0)$	$B = (1/1/0)$
$C = (0/1/1)$	$D = (1/0/0.4)$
$E = (1/1/0.4)$	$F = (0/1/0.8)$
$G = (0/0/0.8)$	

  und berechne den Inhalt folgender Flächen:

  - ABC
  - $DEFG$



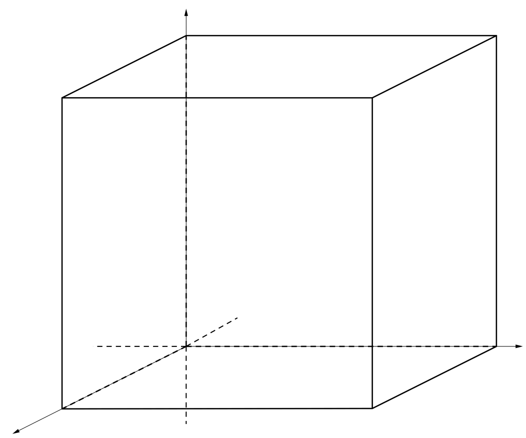
- Zeichne die folgenden Punkte ein

  $A = (1/0/0)$ $B = (1/1/0)$
  $C = (0/0/0)$ $D = (0.5/1/0.8)$
  $E = (0/0/0.5)$ $F = (0.5/1/1)$

  und berechne den Umfang, Inhalt & die Innenwinkel der folgenden Dreiecke:

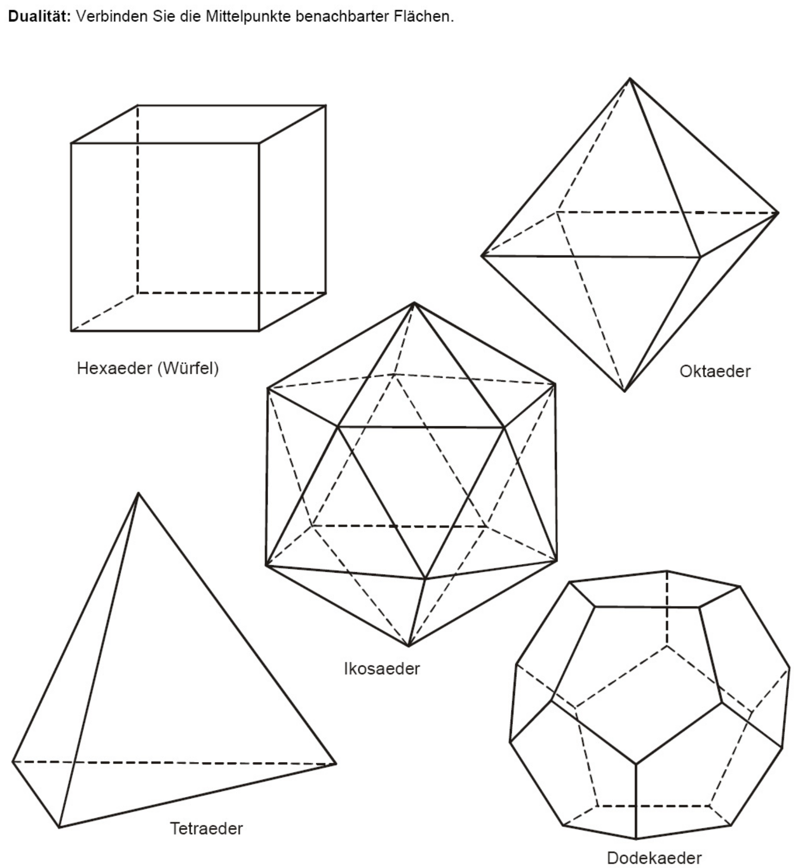
  - ΔAEF

  - ΔCBD



3.8.4 Die Platoischen Körper

Wir schliessen unsere Übungen zur räumlichen Vorstellung mit der *Dualität* unter den Platonischen Körpern ab:



[a]

[a]Vorlage: D. Ortner: *Die fünf Platonischen Körper*
http://www.zebis.ch/inhalte/unterricht/mathematik/polyeder.pdf

Aufgaben 3.19

- *Formuliere den* Euler'schen Polyedersatz *und überprüfe seine Gültigkeit an den Platonischen Körpern.*
- *Untersuche die Platonischen Körper auf* Dualität.

3.9 *Meine* Zusammenfassung - Trigonometrie Teil 1

4 Trigonometrie - 2. Teil
Im beliebigen Dreieck

Wir werden im 2. Teil der Trigonometrie mit einer *kurzen Repetition* der bisherigen trigonometrischen Beziehungen beginnen und uns anschliessend mit den *trigonometrischen Beziehungen im beliebigen Dreieck* befassen. Dies wird uns auf den *Sinus-* und *Cosinussatz* führen, dessen Anwendungen wir an Beispielen besprechen werden. Insbesondere werden wir auch die Eindeutigkeit von Lösungen bei deren Anwendungen diskutieren.

4.1 Repetition

.

Geometrie-Aufgaben: *Repetitionsserie zur Trigonometre I*
(Zugehörige Lösungen)

4.2 Der Cosinussatz

In einem beliebigen Dreieck ΔABC gilt:

<u>Beweise:</u>

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

1. Fall: α ist spitz

2. Fall: α ist stumpf

3. Fall:

Beispiel 4.1 In einem beliebigen Dreieck ΔABC sind folgende Grössen gegeben:

$$a = 8\ ,\ b = 5\ ,\ \gamma = 75^0$$

Konstruiere das Dreieck ΔABC und berechne c , α & β .

Aufgaben 4.1 *Leite den Cosinus-Satz her, für* β*, mit* β *= spitz.*

Aufgaben 4.2 *Berechne die Winkel in den Dreiecken ΔABC mit folgenden Seiten:*

1. $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$

2. $a = 1,\ b = 2,\ c = 2.5$

3. $a = 1,\ b = 2,\ c = 4$

4.3 Der Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck ΔABC gilt:

Beweis:

Beispiel 4.2 In einem beliebigen Dreieck ΔABC sind die folgenden Grössen gegeben:

$$b = 14.1,\ c = 26.4 \ \text{ und } \ \gamma = 105.3^0$$

Berechne die fehlenden Grössen.

Aufgaben 4.3 *In einem beliebigen Dreieck ΔABC sind die folgenden Grössen gegeben:*

$$\alpha = 94^0 \ , \ \gamma = 61^0 \quad und \quad a = 9$$

Berechne c.

Die Lösung und drei weitere Aufgaben zum Cosinus- & Sinussatz sind zu finden auf

Serlo - Die freie Lernplattform

Aufgaben 4.4 *Leite eine Flächenformel in Abhängigkeit von γ für ein beliebiges Dreieck ΔABC her.*
Arbeite mit γ = stumpf.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einer *verschärften Version* des Sinussatzes abschliessen:

In einem beliebigen Dreieck ΔABC mit den üblichen Bezeichnungen ist das Verhältnis von

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = k = konst.$$

Und aufgrund unserer bereits gelösten Aufgaben wissen wir auch schon, welchen Wert diese Konstante k annimmt : ...

Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie 4*
(Zugehörige Lösungen)

4.4 Eindeutigkeit der Lösungen bei den Anwendungen des Sinus- und Cosinussatzes

Als Einstieg in diesen Abschnitt die folgende Aufgabe:

Aufgaben 4.5 *In einem beliebigen Dreieck ΔABC sind folgende Grössen gegeben:*

$$\alpha = 25^0 \ , \quad a = 4 \ , \quad b = 6$$

Berechne c, β *und* γ *und konstruiere zur Kontrolle das Dreieck* ΔABC.

Wir wollen nun der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen eine oder mehrere Lösungen existieren und wir wie viele Lösungen gebrauchen.

Grundsätzlich gilt, das bei Dreiecksaufgaben die Lösungen eindeutig bestimmt sind, wenn die *Kongruenzsätze* erfüllt sind:

1. ...
2. ...
3. ...
4. ...

Bei der Umkehrung der Sinus- und Cosinusfunktion ($\sin^{-1}$ und $\cos^{-1}$) entstehen aber mehrere Lösungen:

- Ist der *Cosinuswert* bekannt, so liefert uns der TR einen zugehörigen Winkel, während die Anwendung des Einheitskreises und die Periodizität unendlich viele Lösungen liefert:

  Bsp.: $\cos\varphi = 0.7$

  · der TR liefert:
  $\varphi_0 = \ \ldots$

  · der Einheitskreis liefert :
  $\varphi_0 = \ \ldots$
  $\psi_0 = \ \ldots$

  · die Periodizität des Cosinus liefert:
  $\varphi_1 = \ \ldots$
  $\varphi_2 = \ \ldots$
  $\vdots$
  $\varphi_k = \ \ldots$

  $\psi_1 = \ \ldots$
  $\psi_2 = \ \ldots$
  $\vdots$
  $\psi_k = \ \ldots$

- Ist der *Sinuswert* bekannt, so liefert uns der TR einen zugehörigen Winkel, während die Anwendung des Einheitskreises und die Periodizität unendlich viele Lösungen liefert:

  Bsp.: $\sin\varphi = 0.4$

  · der TR liefert:
  $\varphi_0 = \ \dots$

  · der Einheitskreis liefert :
  $\varphi_0 = \ \dots$
  $\psi_0 = \ \dots$

  · die Periodizität des Cosinus liefert:
  $\varphi_1 = \ \dots$
  $\varphi_2 = \ \dots$
  $\vdots$
  $\varphi_k = \ \dots$

  $\psi_1 = \ \dots$
  $\psi_2 = \ \dots$
  $\vdots$
  $\psi_k = \ \dots$

Welche Lösung/ Lösungen sind nun zu verwenden und unter welchen Bedingungen ist es überhaupt notwendig, eine zweite Lösung zubestimmen?

- Im Fall *Cosinus*:

  · die zweite Lösung ist immer

  · $\Rightarrow$

  · $\Rightarrow$

- Im Fall *Sinus*:

  · die zweite Lösung ist immer

  · $\Rightarrow$

  · $\Rightarrow$

Beispiel 4.3 In einem beliebigen Dreieck ΔABC sind die folgenden Grössen gegeben:

$$b = 6.5,\ a = 8.7,\ \beta = 14.0^0$$

Berechne α, γ und c.

Aufgaben 4.6 *In einem beliebigen Dreieck ΔABC sind die folgenden Grössen gegeben:*

$$c = 7,\ a = 3,\ \alpha = 33^0$$

Berechne die fehlenden Grössen.

Aufgaben 4.7 *Für die Konstruktion und vollständige Berechnung von Dreiecken mit den bekannten Grössen ssw kann es zwei, eine oder keine Lösung geben.*
Untersuche die Situationen (Hinweis: Kongruenzsätze)

Und berechne die fehlenden Grössen in folgenden Fällen:

- $a = 4\ ,\ b = 5$ *und* $\alpha = 35^0$
- $a = 4\ ,\ b = 5$ *und* $\alpha = 65^0$

Aufgaben 4.8 *In einem Dreieck* ΔABC *sei* $a = 4$ *und* $b = 5$.
Weiter sei

- $\alpha = 35^0$,
- $\alpha = 65^0$.

Untersuche zuerst, ob es Dreiecke mit diesen Bestimmungstücken gibt und berechne gegebenenfalls die restlichen Winkel und die Seite c.

Aufgaben 4.9 *Beweise folgende Aussage:*

> *„In jedem beliebigen Dreieck teilt die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten. “*

Geometrie-Aufgaben: *Trigonometrie 5*
(Zugehörige Lösungen)

4.5 *Meine* Zusammenfassung - Teil 2