

Die Kreisgleichung

eine Herleitung in der xy - Ebene

Eine Unterrichtslektion mit der Klasse 6Ge der KSUster

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

25. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Ein kurzer Überblick	2
2	Was ihr kennen müsst ...	3
3	Die Herleitung der Kreisgleichung	4
4	Erste Anwendungen	6
5	Ein schöner Abschluss	7
6	Aufgaben	8
7	Das F & A - Dokument	9

1 Ein kurzer Überblick

- Das **Ziel** ist die Herleitung der *Kreisgleichung*.

Wir werden mit Hilfe der *Vektorgeometrie* die Kreisgleichung in der *Vektorform* herleiten und anschliessend in eine algebraische und sehr praktische sogenannten *Koordinatengleichung* umformen.

- Zum **Umgang mit diesem Skript:**

Das Skript dient als roter Faden und wird von uns *zusammen* bearbeitet. Ihr könnt die Papiervorlage verwenden oder unter dem folgenden *QR - Code* das zugehörige PDF herunterladen und es digital bearbeiten.



Womit und wie ihr das Skript ergänzt, bleibt euch überlassen. Ich werde euch meine Mitschrift am Abend für einen Download zur Verfügung stellen.

- **Ganz Wichtig:**

Wenn ihr etwas nicht versteht, nicht lesen könnt, oder ich eine Notation verwende, die euch fremd ist, ... unbedingt nachfragen und nicht erst 5 Minuten warten.

Auf ein gutes Gelingen ...

2 Was ihr kennen müsst ...

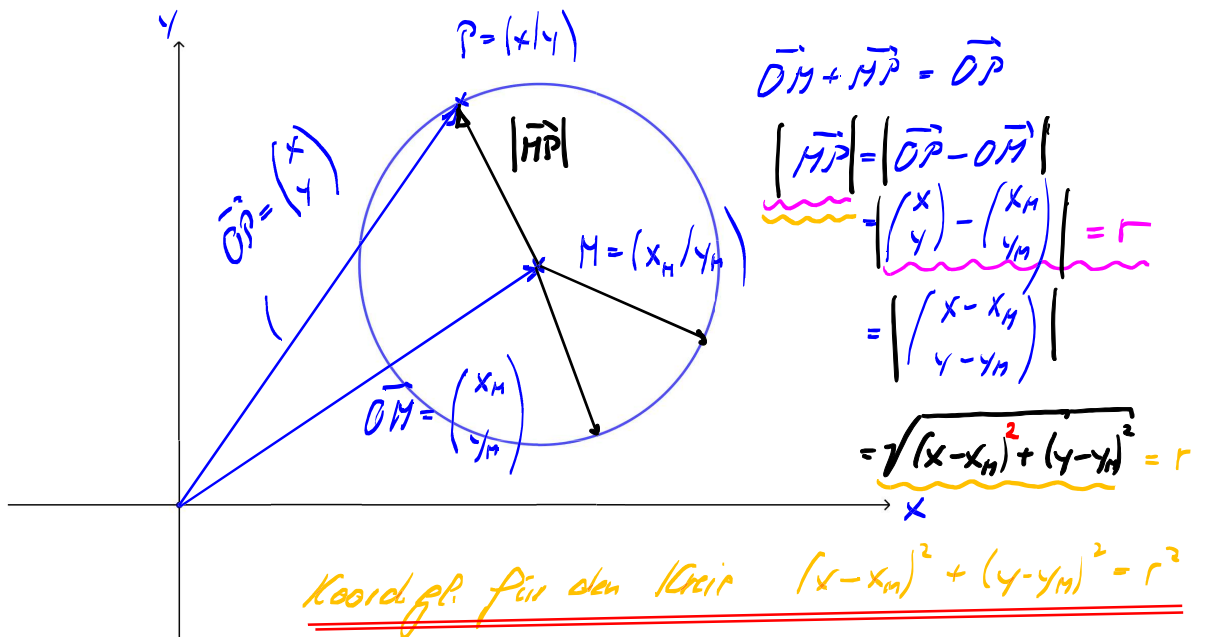
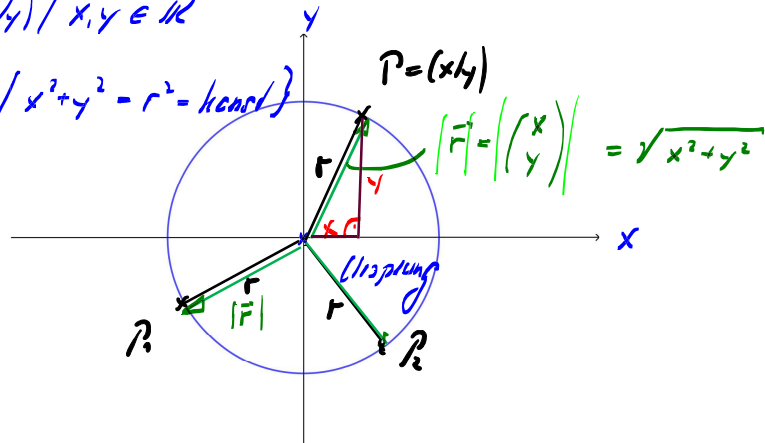
- die xy - Ebene in der mengentheoretischen Schreibweise:
- die **Vektoraddition**,
- der **Betrag** eines Vektors,
- der **Satz des Pythagoras**,
- die **Quadratische Ergänzung**

und natürlich die üblichen Rechengesetze ...

3 Die Herleitung der Kreisgleichung (in der xy -Ebene)

$$E = \{(x/y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$K = \{(x/y) \mid x^2 + y^2 = r^2 = \text{konst.}\}$$



$$\vec{OM} + \vec{MP} = \vec{OP}$$

$$|\vec{MP}| = |\vec{OP} - \vec{OM}|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \right| = r$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x - x_M \\ y - y_M \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$$

Koordinatengl. für den Kreis $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

In der Vektorform: $\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \right| = r$

... und das *Praktische* an diesen Gleichungen zeigt sich im Lösen der folgenden Beispiele:

Beispiel 1 Was stellen die folgenden Gleichungen geometrisch dar:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$$

Kreis mit $M = (2|3)$ und $r = 4$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Kreis mit $M = (0|0)$ und $r = 2$

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \overrightarrow{OM} \right| = 169$$

Kreis um M und $r = 13$

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 12$$

$M = (1|0)$ und $r = \sqrt{12}$

$$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = q^2$$

$M = (x_S | y_S)$ und $r = q$.

Aufgaben 1 Bestimme die Gleichung für den Kreis mit Mittelpunkt $M = (7 | -12)$ und Radius $r = 5$

- in der Vektorform, $\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = 5$

- in der Koordinatenform $(x-7)^2 + (y+12)^2 = 25$

und untersuche, ob der Punkt $A = (5 | -9)$ auf, innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

innerhalb,

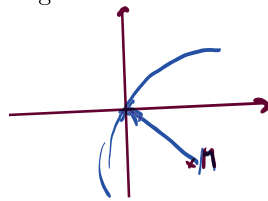
4 Erste Anwendungen

Aufgaben 2 Bestimme die Koordinatengleichung für den Kreis mit den jeweils folgenden Eigenschaften:

1. Der Mittelpunkt liegt im Ursprung und der Radius ist 3.

2. Der Mittelpunkt liegt im Punkt $M = (2/ - 3)$ und der Radius ist 7.

3. Der Mittelpunkt liegt im Punkt $M = (6/ - 8)$ und der Ursprung soll auf dem Kreis liegen.



4. Der Mittelpunkt liegt im Punkt $M = (-1/2)$ und der Punkt $B = (2/6)$ soll auf dem Kreis liegen.

5. Die Punkte $C = (3/2)$ und $D = (-1/6)$ liegen sich diametral gegenüber auf dem Kreis.

$$\frac{(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 = r^2}{\Leftrightarrow \underbrace{1 \cdot x^2 - 2x_M x + x_M^2} + y^2 - 2y_M y + y_M^2 = r^2}$$

5 Ein schöner Abschluss

Beispiel 2 Was stellt die folgende Gleichung geometrisch dar:

$$x^2 + y^2 - 6x + y + \frac{21}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 \cdot x^2 - 6x} + y^2 + y = -\frac{21}{4}$$

⋮

Quadrat. Ergänzen ...

6 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Dreier-Gruppen zu lösen:

Aufgaben 3 *Welche der folgenden Gleichungen stellen einen Kreis dar?
Bestimme gegebenenfalls den Mittelpunkt und den Radius.*

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + x = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - y = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0 \quad (6)$$

$$x^2 + 25 + y^2 + 4 = 10x - 4y \quad (7)$$

Aufgabenzuordnung:

- Gruppe A: Aufgaben 1 + 2
- Gruppe B: Aufgaben 1 + 3
- Gruppe C: Aufgaben 1 + 4
- Gruppe D: Aufgaben 1 + 5
- Gruppe E: Aufgaben 1 + 6
- Gruppe F: Aufgaben 1 + 7

7 Das *F & A* - Dokument

Das *Frage und Antwort* - Dokumente ist ein *WORD* - Dokument,

- in welchem ihr online und zeitunabhängig Fragen zum Unterricht stellen und diese auch gegenseitig beantworten könnt,
- ihr einen Link zu einem Video findet, das den Theoriestoff nochmals vorstellt,
- ihr eure Lösungen zu den Aufgaben posten könnt.



oder

[zum *F & A* - Dokument](#)