

# Vektorgeometrie

2. Teil

MNProfil - Gymnasiale Oberstufe

**Kurz-Version**

Ronald Balestra  
CH - 8046 Zürich  
[www.ronaldbalestra.ch](http://www.ronaldbalestra.ch)

**Name:**

**Vorname:**

14. Dezember 2023

Überblick über die bisherigen *Vektorgeometrie* - Themen:

1. Einführung & die analytische Darstellung der Vektoren
2. Vektoren & die Grundoperationen
3. Das Skalar- & Vektorprodukt

# Inhaltsverzeichnis

<b>4</b>	<b>Geraden &amp; Ebenen im Raum</b>	<b>2</b>
4.1	Parameterdarstellung einer Geraden . . . . .	2
4.1.1	Klassische Anwendungen . . . . .	3
4.1.2	Gegenseitige Lage von Geraden im Raum . . . . .	4
4.2	Parameterdarstellung einer Ebene . . . . .	5
4.2.1	Klassische Anwendungen . . . . .	6
4.2.2	Koordinatengleichung . . . . .	7
4.2.3	Schrägbilder . . . . .	8
4.2.4	Vom Normalenvektor zur Koordinatengleichung . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Schnitt- &amp; Abstandsprobleme</b>	<b>10</b>
5.1	Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . . .	11
5.2	Abstand einer Geraden von einer Ebene . . . . .	13
5.3	Abstand zweier Ebenen . . . . .	15
5.4	Das Spatprodukt . . . . .	17
5.5	Schnittgerade und -winkel zweier Ebenen . . . . .	18
5.6	Schnittgerade und -winkel einer Ebene mit einer Ebene . . . . .	20
5.7	Schnittpunkte & -winkel zweier Geraden . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Meine Zusammenfassung</b>	<b>24</b>

### *Einleitung & Ausblick*

Wir werden in diesem Kapitel die *Darstellungen von Geraden und Ebenen* im  $\mathbb{R}^3$  herleiten und diskutieren. In den Anwendungen werden wir die *gegenseitige Lage* und insbesondere die *Abstands- & Schnittprobleme* behandeln.

[Geometrie-Aufgaben: Vektorgeometrie Repetitionsserie zu Teil 1](#)

## 4 Geraden & Ebenen im Raum

### 4.1 Parameterdarstellung einer Geraden

Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt wird, wollen wir auch eine von nur zwei Punkten abhängige Darstellung der Geraden:

Für die Darstellung einer Geraden brauchen wir somit:

- 1.
- 2.

#### 4.1.1 Klassische Anwendungen

- Beispiel 4.1.1**
- Bestimme eine Parameterdarstellung für die Gerade  $g$ , die durch die Punkte

$$A = (10/3/ - 12) \quad \text{und} \quad B = (15/2/ - 9)$$

eindeutig bestimmt ist.

- Welche der folgenden Punkte liegen auf der obigen Geraden  $g$ :

$$P = (20/1/ - 6) \quad \text{oder} \quad Q = (5/4/ - 12)$$

### 4.1.2 Gegenseitige Lage von Geraden im Raum

Einige Vorüberlegungen:

**Beispiel 4.1.2** Bestimme den Schnittpunkt von  $g$  mit  $h$ , mit

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}(s) = \begin{pmatrix} 43 \\ 26 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## 4.2 Parameterdarstellung einer Ebene

Da eine Ebene durch drei Punkte eindeutig bestimmt wird, wollen wir auch eine von drei Punkten abhängige Darstellung der Ebene:

Für die Darstellung einer Ebene brauchen wir somit:

- 1.
- 2.



### 4.2.1 Klassische Anwendungen

**Beispiel 4.2.1** Für dieses Beispiel gehen wir von folgenden Punkten aus:

$$A = (1/ - 1/2) , \quad B = (-2/0/3) \quad \text{und} \quad C = (3/1/ - 2)$$

- Bestimme eine Parameterdarstellung für die Ebene  $E$ , die durch die Punkte  $A, B$  und  $C$  eindeutig bestimmt ist.

- Welche der folgenden Punkte liegen in der Ebene  $E$

$$P = (2.5/1.5/0) \quad , \quad Q = (2/2/ - 2.5)$$

- Wie muss die Koordinate  $z$  für  $R = (13/0/z)$  gewählt werden, so dass gilt:  $R \in E$

### 4.2.2 Koordinatengleichung

Wir wollen noch eine weitere Darstellungsform einer Ebene besprechen, die sog. *Koordinatengleichung*.

Durch die Elimination der Parameter aus der Komponentengleichung der Parameterdarstellung entsteht eine lineare Gleichung der folgenden Form:

$$ax + by + cz - d = 0$$

Dies ist die eine sog. *Koordinatengleichung* der Ebene und beschreibt die Menge aller Punkte des Raumes, welche auf der Ebene liegen.

Wir wollen an einem Beispiel diese Elimination durchführen und eine Koordinatengleichung herleiten:

**Beispiel 4.2.2** Unsere Ebene E ist durch die folgenden Punkte eindeutig bestimmt:

$$A = (3/0/2) , \quad B = (0/ - 6/16) , \quad C = (-3/1/4)$$

- eine Parameterdarstellung ist:
  
- die zugehörigen Komponentengleichungen lauten:
  
  
- die Elimination der Parameter ohne Änderung der Lösungsmenge erhalten wir durch das Anwenden der *Äquivalenzumformungen*, dies sind:

–  
–

### 4.2.3 Schrägbilder

Um uns ein *Bild* von der Lage einer Ebene  $E$  machen zu können, verwenden wir die Schnittpunkte von  $E$  mit den Koordinatenachsen zur Darstellung von  $E$  durch das sog. *Schrägbild*.

(Wir verwenden die Ebene  $E$  aus dem vorherigen Beispiel.)

#### 4.2.4 Vom Normalenvektor zur Koordinatengleichung

## 5 Schnitt- & Abstandsprobleme

Im Folgenden werden wir uns mit

*Abstände zwischen Punkte, Geraden und Ebenen*

und

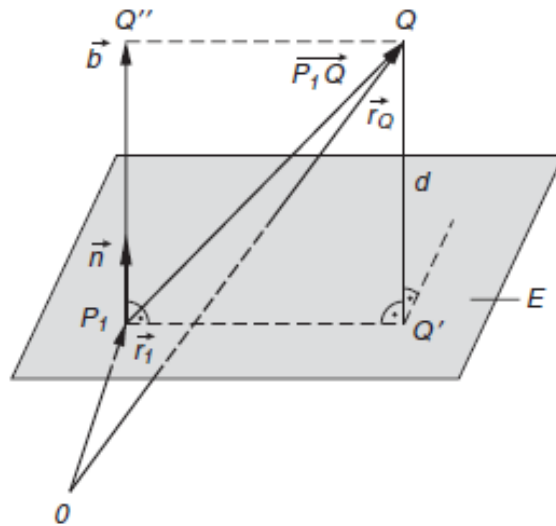
*Schnittpunkten, Schnittgeraden und Schnittwinkel*

befassen.

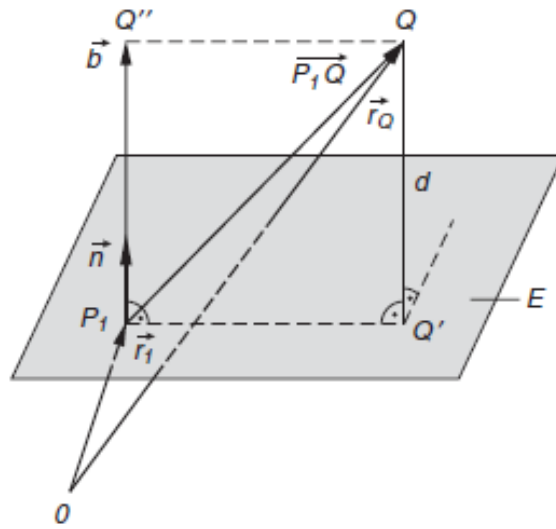
Da Abstände die Längen der kürzesten Verbindungen sind, steigen wir ein mit der *Projektion eines Vektors*.

Im Folgenden verwenden wir die Bildvorlagen von Papula.

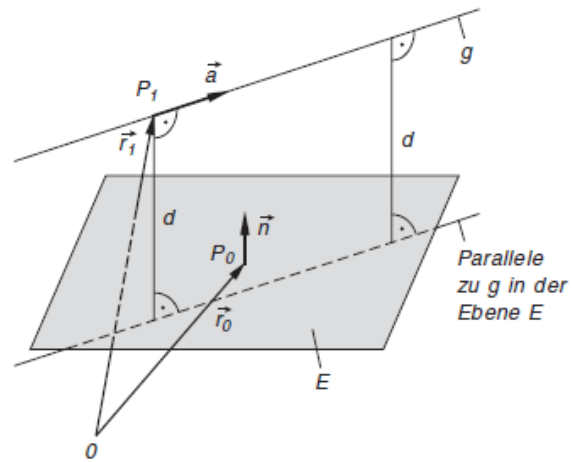
### 5.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene



**Aufgaben 5.1** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*

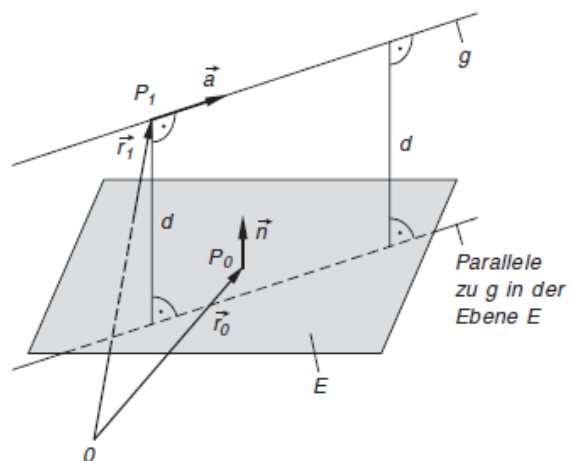


## 5.2 Abstand einer Geraden von einer Ebene

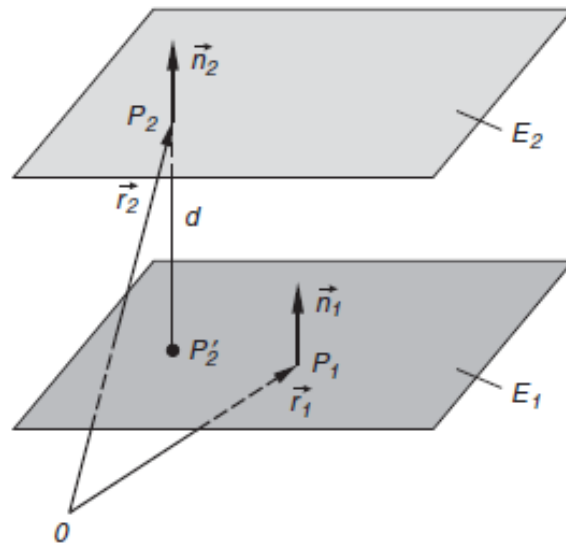




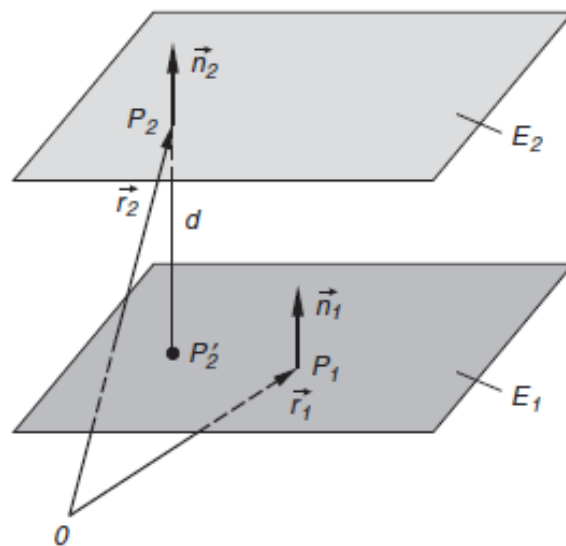
**Aufgaben 5.2** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*



### 5.3 Abstand zweier Ebenen



**Aufgaben 5.3** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*

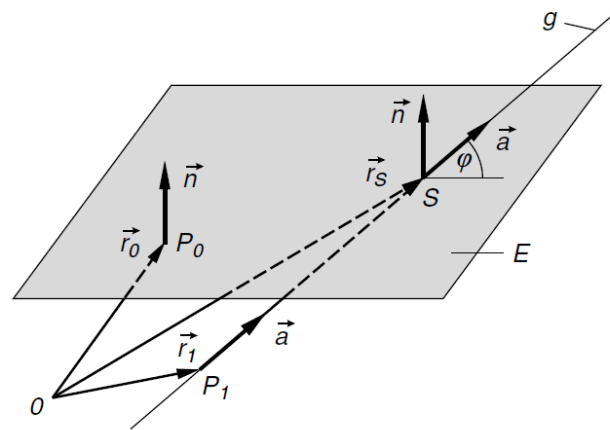


## 5.4 Das Spatprodukt

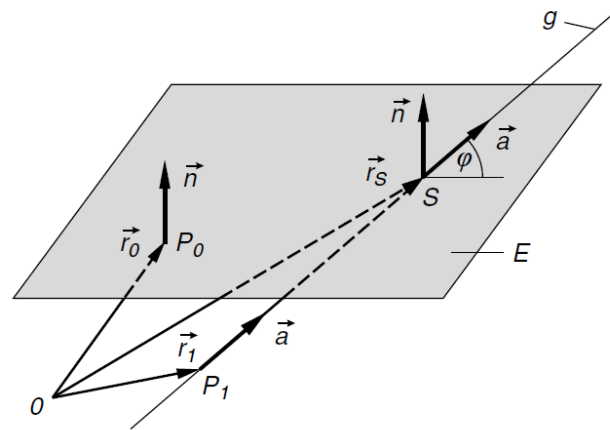
Recherchiere selber ...

**Aufgaben 5.4** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*

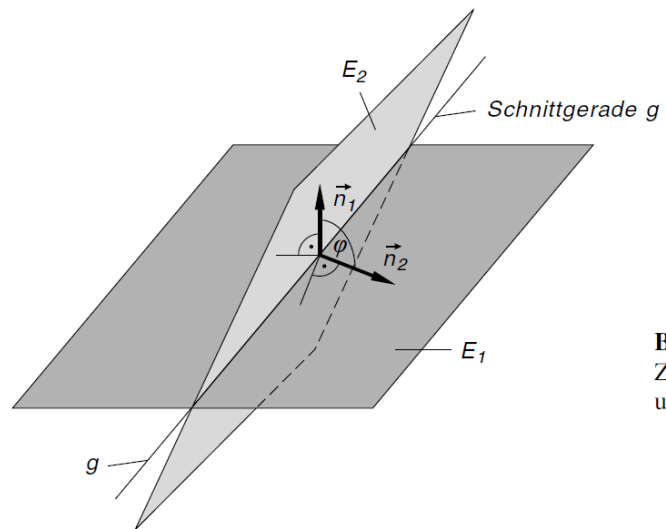
## 5.5 Schnittgerade und -winkel zweier Ebenen



**Aufgaben 5.5** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*

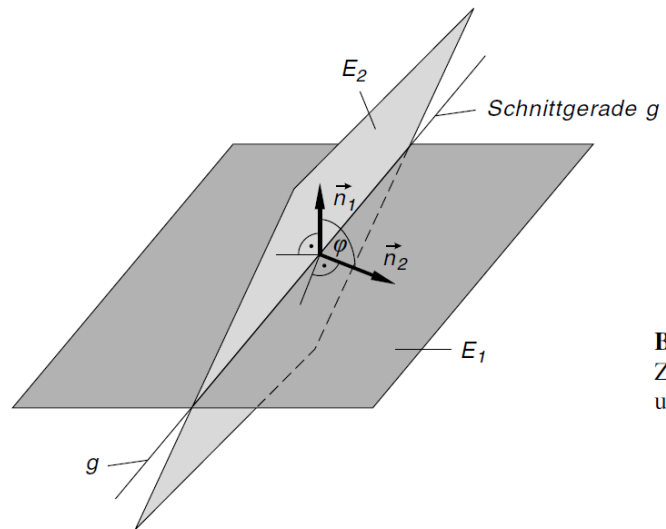


## 5.6 Schnittgerade und -winkel einer Ebene mit einer Ebene



**B**  
**Z**  
**u**

**Aufgaben 5.6** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*



**B  
Z  
u**



## 5.7 Schnittpunkte & -winkel zweier Geraden

Repetiere diese Situation selbständig ...

**Aufgaben 5.7** *Erstellt zu zweit eine eigene Aufgabe und löst sie.*

Eine Aufgabenserie nur zu Abstands- & Schnittproblemen

**Geometrie-Aufgaben: Vektorgeometrie 11**  
zugehörige Lösungen

## 6 *Meine* Zusammenfassung