Schnitt- & Abstandsprobleme
in der Vektorgeomtrie

Aufgabenserie zum *Stresssiv-Programm*

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

18. April 2017

Inhaltsverzeichnis

5.1 Die Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor

Aufgabe :

Wir betrachten die folgenden Punkte:

$$A = (1/-2/3),\ B = (5/-8/1),\ C = (2/4/3),\ D = (-1/9/1)$$

Bestimme die Komponenten der Projektion von $\overrightarrow{AB}$ auf $\overrightarrow{CD}$.

5.2 Das Spatprodukt

Aufgabe :

Wir betrachten die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

5.3 Schnittpunkt & Schnittwinkel zweier Geraden

Aufgabe :

Wir betrachten die folgenden Geraden:

$$g : \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{h}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$k : \vec{k}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad j : \vec{h}(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Schnittpunkte und -winkel von g und h und von k und j

5.4 Schnittpunkt & Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene

Aufgabe :

Wir betrachten die folgenden Geraden und Ebenen:

$$g : \text{mit } P = (5/1/2) \in g \;\; \text{und} \;\; \text{Richtungsvektor } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$E : \text{mit } Q = (2/1/8) \in E \text{ und } \; \text{Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$F : \text{mit } \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \;=\; 0$$

Bestimme die Schnittpunkte und -winkel von g und E und von h und F

5.5 Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

Aufgabe :

Wir betrachten die folgenden Ebenen:

$$E_1 : \vec{n_1} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) \; = \; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} \; = \; 0$$

$$E_2 : \text{ mit Normalenvektor } \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } P = (1/5/1) \in E_2$$

Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel von E_1 mit E_2.

5.6 Abstand eines Punkes von einer Geraden

Aufgabe :

Wir betrachten die folgende Gerade und Punkte:

$$g : \text{mit } P = (4/2/3) \in g \quad \text{und} \quad \text{Richtungsvektor } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = (4/1/1) \quad \text{und} \quad R = (2/1/0)$$

Bestimme $d(g, Q)$ und $d(g, R)$

5.7 Abstand zwischen zwei Geraden

<u>*Aufgabe :*</u>

Wir betrachten die folgende Geradenpaare:

$$g : \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{h}(s) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{h}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{h}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme jeweils die Abstände $d(g, h)$.

5.8 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Aufgabe :

Wir betrachten den folgenden Punkt P und die Ebene E:

$$P = (3/3/5) \ \text{ und } \ E : x - 12y + 12z + 7 = 0$$

Bestimme $d(P, E)$.

5.9 Abstand einer Geraden von einer Ebene

Aufgabe :

Bestimme eine zu $E : x - 2y + 3z + 6 = 0$ parallele Gerade g und bestimme dessen Abstand zu E

5.10 Abstand zweier Ebenen

Aufgabe :

Bestimme eine zu $E : x - 2y + 3z + 6 = 0$ parallele Ebene F und bestimme dessen Abstand zu E

5.11 ... weitere Aufgaben zu Abstandsberechnungen

1. Wir betrachten:

$$P = (9/-1/8) \;\; \text{und} \;\; \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Bestimme den Abstand $d(P, g)$ des Punktes P von der Geraden g.

   (<u>Lösung:</u> $d = 7$)

2. Wir betrachten:

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{h}(s) = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Beweise, dass die Geraden g und h zueinander parallel sind und bestimme deren Abstand $d(g, h)$

   (<u>Lösung:</u> $d = 12$)

3. Wir betrachten:

$$g: \; \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: \; x - y + 2z - 6 = 0$$

   Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene E und den Winkel $\angle(g, E)$, unter welche die Gerade die Ebene schneidet.

   (<u>Lösung:</u> $S = (1/1/3), \; \varphi = 41.8^0$)

4. Wir betrachten:

$$E: \ 2x - y + 2z - 6 = 0 \text{ und } P = (6/3/12)$$

Bestimme $d(P, E)$ und $d(O, E)$

(Lösung: $d(O, E) = 2, d(P, E) = 9$)

5. Wir betrachten:

$$E: \ x+2y+3z-14 = 0, \ F: \ 3x+6y-7z+6 = 0 \text{ und } G: \ -x-2y-3z+2 = 0$$

Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel zwischen den sich schneidenden Ebenen und den Abstand zwischen den zueinander parallelen Ebenen.

(Lösung: $\angle(E, F) = 80.5^0$, Schnittgerade $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$d(E, G) = 3.207$