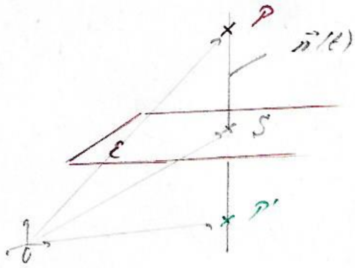
Geometrie-Aufgaben: Vektorrechnung 11

(1) $P = (0|-5|5)$

$\varepsilon: x + 4y - 3z + 8 = 0$



$\vec{n}(t) = \vec{OP} + t\cdot\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ für S:

$(0+t) + 4\cdot(-5+4t) - 3\cdot(5-3t) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$

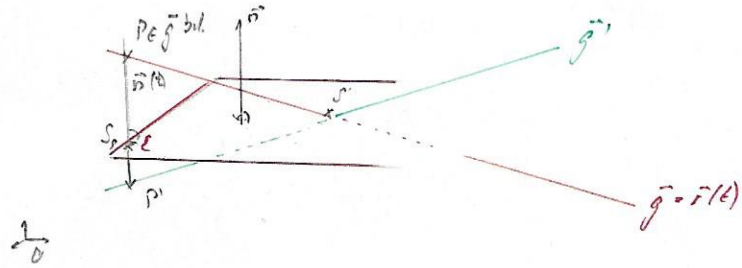
$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{n}(1) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{OP'} = \vec{n}(2) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P' = (2|3|-1)}}$

(2) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$

$\varepsilon: x - 2y + z - 3 = 0$



Zwischenfragen: · Ist ein Schnittpunkt überhaupt vorhanden?

ja, falls $\vec{a}\cdot\vec{n} \neq 0$

$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} = 1 - 0 + 6 \neq 0.$

$\Rightarrow$ für S: $(3+t) - 2\cdot(4+0t) + (5+6t) - 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{t = 0{,}425}$ $(3/7)$

$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{g}(0{,}425) = \begin{pmatrix}3{,}425\\4\\7{,}571\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24/7\\4\\53/7\end{pmatrix}$

· $P \in \vec{g}$ bel.: $\vec{OP} = \vec{r}(0) = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}(t) = \vec{OP} + t\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für S_n: $(3+t) - 2\cdot(4-2t) + (5+t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$

$\Rightarrow \underline{\vec{OS_n}} = \vec{n}(1/2) = \begin{pmatrix}2{,}5\\3\\4{,}5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für P': $\vec{OP'} = \vec{n}(1) = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P' = (4|2|6)}$

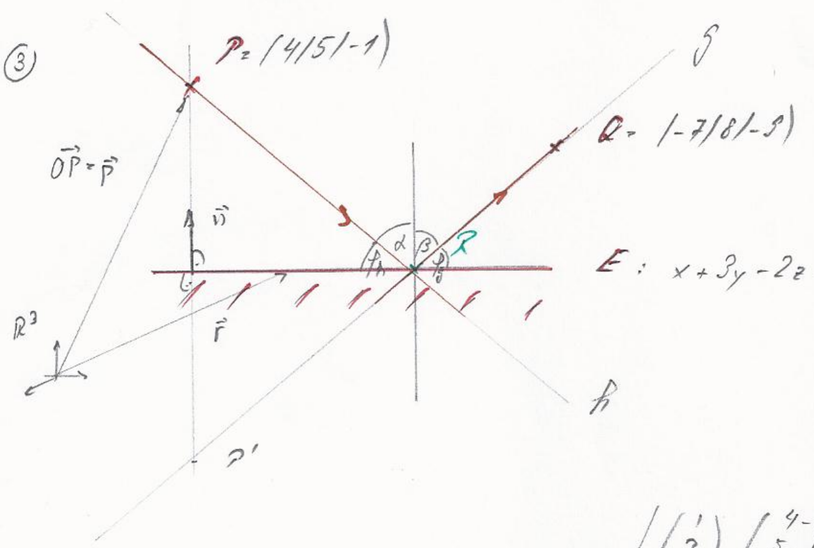
$\Rightarrow$ für gespiegelte Gerade: $\vec{g}'(s) = \underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}}_{\vec{OP'}} + \underbrace{s\cdot\begin{pmatrix}-4/7\\2\\11/7\end{pmatrix}}_{+\, s\, \vec{P'S}}$ (~ Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-4\\14\\11\end{pmatrix}$)

Zwischenfrage: Ist der Einfallswinkel = dem Ausfallswinkel?

Schnittwinkel Ebene-Gerade: $\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}\right)$ $\Rightarrow$ für $\varepsilon, \vec{g}$: ... $\underline{\varphi = 28{,}022°}$

für $\varepsilon, \vec{g}'$: ... $\varphi' = 28{,}022°$

③



$E: x + 3y - 2z - 7 = 0$

$\Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d(P, E) = \dfrac{|\vec{n}_E \cdot (\vec{p} - \vec{r})|}{|\vec{n}_E|}$

mit $\vec{r}$ = Ortsvektor für bel. Punkt $\in E$.

(Wähle $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\Rightarrow d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-7 \\ 5-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3+15+2|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \underline{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \vec{OP'} = \vec{OP} - 2 \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{\vec{n_E}}{|\vec{n_E}|} = \ldots = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-6 \\ -1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Kontrolle: $d(P, P') = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{56} = 2 \cdot \sqrt{14}$)

$\Rightarrow \underline{P' = (2|-1|3)}$ $\rightsquigarrow$ Für g: $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\underline{g \cap E}$: $(2 - 9t) + 3(-1 + 9t) - 2 \cdot (3 - 12t) - 7 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{t = 1/3}$

$$\Rightarrow \underline{\vec{OR} = \vec{g}(1/3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R = (-1|2|-1)}}$$

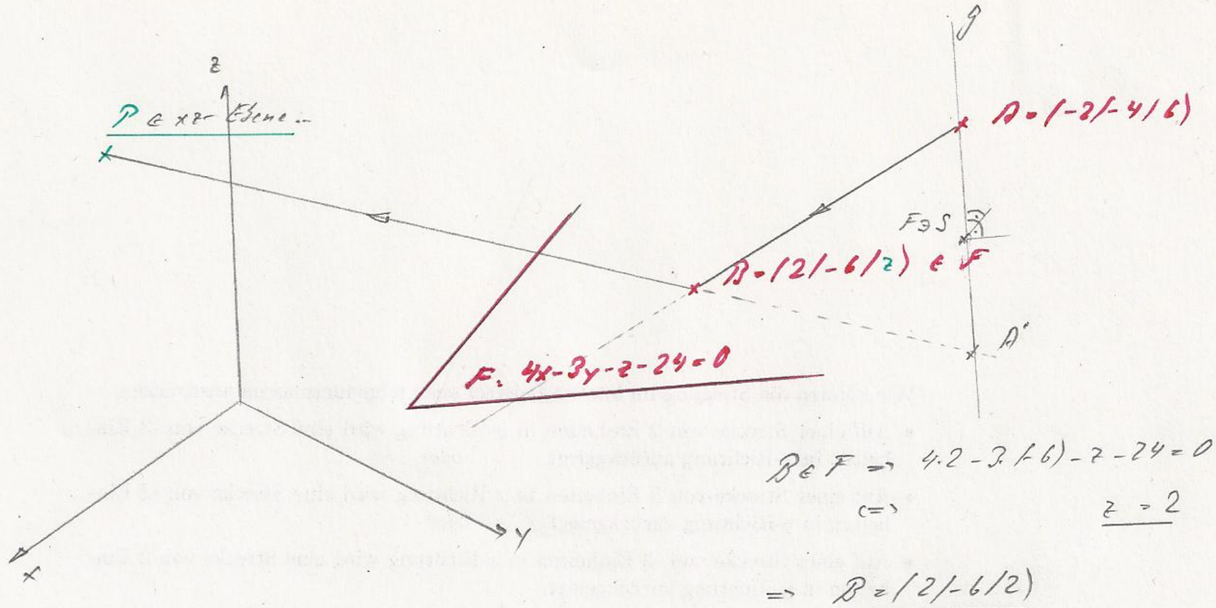
b) $\varphi_h = \sin^{-1}\left(\dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{c}_h|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{c}_h|} \right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{|-5-9+0|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{34}} \right) = \underline{39{,}918°}$ $\Rightarrow$ Einfallswinkel $\underline{\underline{\alpha = 50{,}082°}}$

h: $\vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1-4 \\ 2-5 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{c}_h}$

$\varphi_g = \sin^{-1}\left(\dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{c}_g|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{c}_g|} \right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{|-9+27+24|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{306}} \right) = \underline{39{,}918°}$ $\Rightarrow$ Ausfallswinkel $\underline{\underline{\beta = 50{,}082}}$

$\vec{c}_g = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

4



$B \in F \Rightarrow 4\cdot 2 - 3\cdot(-6) - z - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{z = 2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{B = (2|-6|2)}}$

- $\vec{n}_F = \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$

für g: $\vec{g}(t) = \vec{OA} + t\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$

- $g \cap F \Rightarrow S$: $S = (x|y|z) \in g \Rightarrow \exists\, t_s \in \mathbb{R}: \underbrace{\vec{g}(t_s) = \begin{pmatrix}-2+4t_s\\-4-3t_s\\6-t_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}$

$S \in F \Rightarrow 4\cdot(-2+4t_s) - 3\cdot(-4-3t_s) - (6-t_s) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow -8 + 16t_s + 12 + 9t_s - 6 + t_s - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{t_s = \frac{26}{26} = 1}$

$\Rightarrow \underline{S = (2|-7|5)}$

- für A': $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2\cdot\vec{AS}$ $\quad (= \vec{g}(2\cdot t_s))$

$= \begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$

$= \underline{\begin{pmatrix}6\\-10\\4\end{pmatrix}}$

$\Rightarrow$ gespiegelter Strahl / reflektierter Lichtstrahl: $\quad \ell(t) \overset{\text{z.B.}}{=} \vec{OA'} + t\cdot\vec{A'B}$

$= \begin{pmatrix}6\\-10\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2-6\\-6-(-10)\\2-4\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}6\\-10\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$

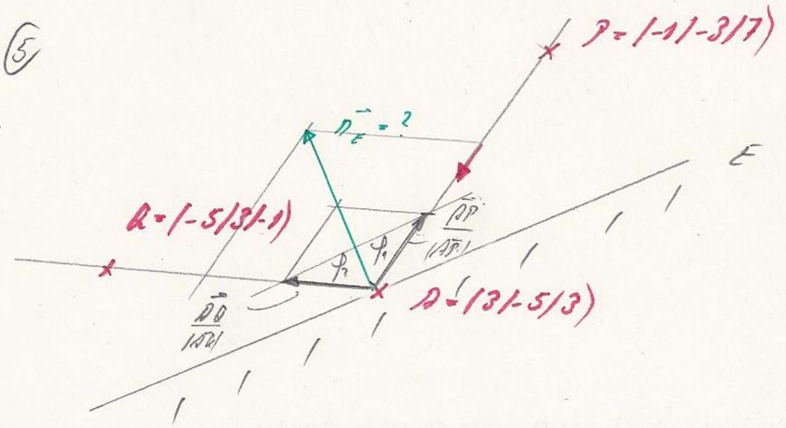
$\Rightarrow$ für $P \in xz$-Ebene: $\quad \vec{OP} = \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}6\\-10\\4\end{pmatrix} + t_P\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix} = \ell(t_P)$

$\Leftrightarrow t_P = 2.5$

$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{\ell}(2.5) = \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P = (-4|0|-1)}}$

- für den Schnittwinkel φ: $\quad \sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}_\ell|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}_\ell|}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \underline{\varphi} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{1\cdot\sqrt{36}}\right) = \underline{\underline{41.810°}}$

5



$\vec{n}_E$ = ∡-halbierende von $\vec{AP}, \vec{AQ}$

$$\vec{n}_E = \lambda \cdot \left(\frac{\vec{AQ}}{|\vec{AQ}|} + \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|} \right)$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{144}} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{36}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8/12 - 4/6 \\ 8/12 + 2/6 \\ -4/12 + 4/6 \end{pmatrix}$$

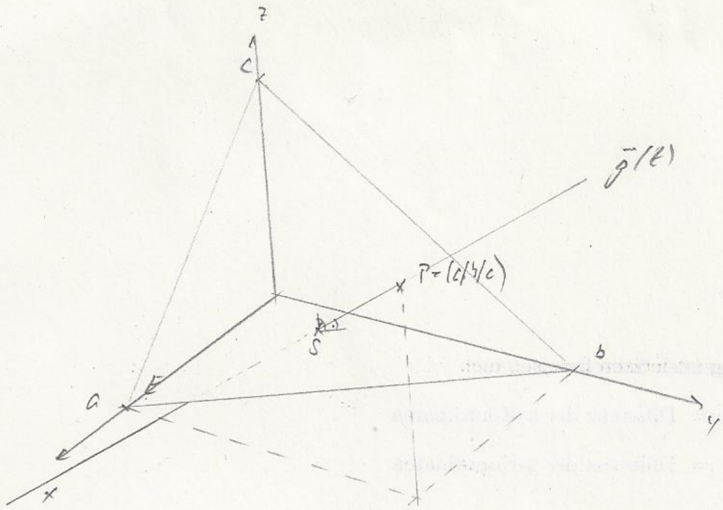
$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8/6 \\ 6/6 \\ 2/6 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{z.B.}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{od.} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots}}$$

Kontrolle: $\varphi_1 \overset{!}{=} \varphi_2$

$$\varphi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}_E}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{n}_E|} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{32 + 12 + 8}{\sqrt{36 \cdot 104}} \right) = \cos^{-1}(0.850\ldots)$$

$$\varphi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AQ} \cdot \vec{n}_E}{|\vec{AQ}| \cdot |\vec{n}_E|} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{64 + 48 - 8}{\sqrt{144 \cdot 104}} \right) = \cos^{-1}(0.850\ldots)$$

⑥



<u>Beh.</u>: $d(P,E) = \dfrac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$ (unter obigen Voraussetzungen!)

<u>Bew.</u>: · Satz 7 $\Rightarrow$ für E: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$$\Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix}$$

· für $\vec{g}(t)$: $\vec{g}(t) = \vec{OP} + t\cdot\vec{n}_E = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\vec{OP}} + \underbrace{t\cdot\begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix}}_{t\cdot\vec{n}_E}$

$\Rightarrow$ für <u>Schnittpunkt S</u> folgt: $\dfrac{a+t/a}{a}+\dfrac{b+t/b}{b}+\dfrac{c+t/c}{c}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{t(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}{a^2b^2c^2} = -2$$

$$\Leftrightarrow t = t_S = \frac{(-2)a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{g}(t_S) = \begin{pmatrix} a+\dfrac{(-2)ab^2c^2}{q} \\ b+\dfrac{(-2)\cdot a^2bc^2}{q} \\ c+\dfrac{(-2)\cdot a^2b^2c}{q} \end{pmatrix}, \text{ mit } q := b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2$$

$$\Rightarrow \vec{SP} = \begin{pmatrix} \dfrac{2ab^2c^2}{q} \\ \dfrac{2a^2bc^2}{q} \\ \dfrac{2a^2b^2c}{q} \end{pmatrix} = \frac{2}{q}\cdot\begin{pmatrix} ab^2c^2 \\ a^2bc^2 \\ a^2b^2c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d(P,E)}} = |\vec{SP}| = \frac{2}{q}\cdot\sqrt{a^2b^4c^4+a^4b^2c^4+a^4b^4c^2}$$

$$= \frac{2\cdot abc\cdot\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2} = \underline{\underline{\frac{2abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}}}$$