Geometrie-Aufg.: Vektorgeometrie

1) a) $A=(1|-1|2)$, $B=(-2|0|3)$, $C=(3|1|-2)$

$\Rightarrow$ Param. Gl.: $\vec{E}(r,t) \stackrel{z.B.}{=} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\qquad\qquad \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AC})$

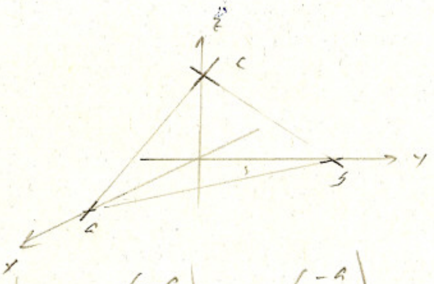
$\Rightarrow$ für Koord. Gl.:
$I: \; x = 1 - 3r + 2t$
$II: \; y = -1 + r + 2t$
$III: \; z = 2 + r - 4t$

$I + 3II \Rightarrow x + 3y \stackrel{IV}{=} -2 + 8t$
$II - III \Rightarrow y - z \stackrel{V}{=} -3 + 6t$

$3IV - 4V \Rightarrow 3\cdot(x+3y) - 4\cdot(y-z) = -6 + 12$
$\Leftrightarrow 3x + 9y - 4y + 4z = 6$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{3x + 5y + 4z - 6 = 0}}$

b), c), d) Resultate angegeben.

2) a) $\Rightarrow$ Achsenabschnitte sind: a, b, c



$\Rightarrow$ Param. Gl.: $\vec{E}(r,t) \stackrel{z.B.}{=} \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für Koord. Gl.:
$x = a - ar - at \quad (I)$
$y = br \quad (II)$
$z = ct \quad (III)$

$b\cdot I + a\cdot II \Rightarrow bx + ay = ab - abt$ $\qquad$ b) $\Leftarrow$

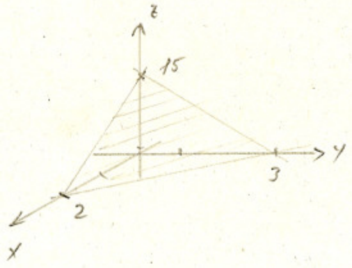
$\stackrel{z=ct}{\Rightarrow} bx + ay = ab - ab\cdot\frac{z}{c}$

$\Leftrightarrow bx + ay + \frac{ab}{c}\cdot z = ab$

$\|:ab$
$\Leftrightarrow \underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$

$\square$

② 3)



=> · Param Gl.

z.B.: $\vec{E}(r,t) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\15\end{pmatrix}$

· Koord Gl.

z.B. $E: \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{15}z = 1$

③ $E: 2x + 3y - 3z + 1 = 0$

· $A = (0|2|2) \overset{?}{\in} E$: $2\cdot 0 + 3\cdot 2 - 3\cdot 2 + 1 = 1 \neq 0$ ↯

· $B = (4|1{,}5|4{,}5) \overset{?}{\in} E$: $2\cdot 4 + 3\cdot 1{,}5 - 3\cdot 4{,}5 + 1 = 0$ ✓

3) Schüler-Bsp ...

④ $E: 3x + 2y + 4z - 12 = 0$

=> · Achsenabschnitt: $S_x = (4|0|0)$

$S_y = (0|+6|0)$

$S_z = (0|0|3)$

· Spurgeraden: $s_x: 3x + 2y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y_I = -\frac{3}{2}\cdot x + 6$

$s_y: 2y + 4z - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y_2 =$

⑤ $S_x = (2/0/0)$, $S_y = (0/3/0)$, $S_z = (0/0/15)$

$\Rightarrow$ a) z.B.: $\vec{E}(r,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

b) z.B. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} y + \frac{1}{15} z = 1 \iff 15x + 10y + 2z = 30$

c) Wähle $r = 1 \wedge s = 2 \Rightarrow \vec{OP} = \vec{E}(1,2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P = (-4/3/30)}}$

Kontrolle: $15 \cdot (-4) + 10 \cdot 3 + 2 \cdot (30) = 30$ ✓

d) Wähle $x = 1 \wedge y = 2 \Rightarrow 15 + 20 + 2z = 30 \Rightarrow \underline{\underline{Q = (1/2/-\frac{5}{2})}}$

$\iff \underline{z = -\frac{5}{2}}$

Kontrolle: $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 - 2r - 2s \\ 3r \\ 15s \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow s = -\frac{1}{6} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow 1 = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot (-\frac{1}{6})$

$= 1$ ✓

e) z.B. $\vec{g}(t) = \vec{OP} + t \cdot \left(1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix}}}$

f) z.B. $\underline{\underline{\vec{h}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \tilde{t} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}}}$

g) $\vec{h}(\tilde{t}) = \vec{g}(t) \iff \begin{matrix} \text{I}: & 1 - 6\tilde{t} = -4 - 6t \\ \text{II}: & 2 + 3\tilde{t} = 3 + 3t \\ \text{III}: & -\frac{5}{2} + 25\tilde{t} = 30 + 30t \end{matrix} \Bigg\} \xrightarrow{\text{I} + 2\text{II}} 5 = 2$ ↯

$\Rightarrow$ kein Schnittpunkt!