Geometrie-Aufgaben: Vektorgeometrie # 9

① Idee: 1. Darstellung der Ebene durch P_1, P_2, P_3 : $\vec{E}(r,s)$

2. Überprüfen $\vec{OP_4} \in \vec{E}(r,s)$

→ Alle Punkte liegen auf einer Ebene.

② a) g_1 durch $P_1 = (3/4/6)$ und $P_2 = (-1/-2/4)$

$$\Rightarrow \vec{g_1}(t_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (= \vec{OP_1} + t_1 \cdot \vec{P_1P_2})$$

g_2 durch $Q_1 = (3/7/-2)$ und $Q_2 = (5/15/-6)$

$$\Rightarrow \vec{g_2}(t_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (= \vec{OQ_1} + t_2 \cdot \vec{Q_1Q_2})$$

· $\nexists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ nicht parallel

· windschief: $\Leftrightarrow$ i) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ✓ (da nicht parallel)

ii) $\left[\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-3 \\ 7-4 \\ -2-6 \end{pmatrix}} \right] \overset{!}{\neq} 0$ (damit nicht komplanar)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -64-(-12) \\ 0-(-16) \\ 6-0 \end{pmatrix} = 100 \neq 0$$

$\Rightarrow$ sind windschief

$$\Rightarrow d = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \right] \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{100}{\left| \begin{pmatrix} 24-(-16) \\ -4-16 \\ -32-(-12) \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{2400}} = \underline{\underline{2.041}}$$

b) $\vec{g_3}(t_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{g_4}(t_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1/3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow g_3 \parallel g_4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-5 \\ 1-1 \\ 5-0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 5-0 \\ (-12)-(-10) \\ 0-(-4) \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{14}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{14}} = 1.793}}$$

c) $\Rightarrow \vec{g_5}(t_5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{g_6}(t_6) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + t_6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ nicht parallel,

denn $\nexists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ · Untersuche auf Schnittpunkt:

$$\vec{g_5}(t_5) = \vec{g_6}(t_6) \iff \begin{aligned} 1 + 2t_5 &\overset{(*)}{=} 6 + t_6 \\ 2 &= -2t_6 \\ 5t_5 &= 13 + 3t_6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{t_6 = -1} \Rightarrow \underline{t_5 = 2}$

$\Rightarrow$ Kontrolle in $*$:

$1 + 2 \cdot 2 = 6 + 1 \cdot (-1)$ ✓

$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{g_5}(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \vec{g_6}(-1)$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = (5/2/10)}}$

· Schnittwinkel $\quad \underline{\varphi} = \arccos \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}}$

$= \arccos \left(\dfrac{17}{\sqrt{406}} \right) = \underline{\underline{32.468°}}$

③ a) $\Rightarrow \vec{g_1}(t_1) = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für E_1: $\left.\begin{array}{l} -x+3y+z+d=0 \\ (-1)\cdot 2+3\cdot(1)+1\cdot 8+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{E_1: -x+3y+z-9=0}$

$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ E_1 und g_1 schneiden sich.

$\Rightarrow -(5+3t_1)+3\cdot(1+1t_1)+1\cdot(2+2t_1)-9=0$

$\Leftrightarrow \quad -9 = -2t_1$

$\Leftrightarrow \quad \underline{t_1 = 4.5}$

$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{g_1}(4.5) = \begin{pmatrix}18.5\\5.5\\11\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = (18.5 / 5.5 / 11)}}$

Schnittwinkel: $\underline{\varphi} = \arcsin\left(\frac{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{154}}\right) = \underline{\underline{9.274^\circ}}$

b) $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g_2 \parallel E_2$

$\Rightarrow \underline{d} = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5-1\\3-1\\6-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{11}}$

$= \frac{|12-2-5|}{\sqrt{11}} = \underline{\underline{1,508}}$

c) $\Rightarrow \underline{\vec{g_3}(t_3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad (\vec{OC} + t_3 \cdot \vec{CD})$

$\cdot \; \vec{n}_{E_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-(-1) \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 \nparallel E_3$

$\vec{FG} \times \vec{FH}$

$\Rightarrow$ für E_3: $\left.\begin{array}{l} -x - y + d = 0 \\ (-1)\cdot 1 - 1\cdot(-2) + 0\cdot(-2) + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d = -1$

$\Rightarrow \underline{E_3 : \; -x - y - 1 = 0}$

(ist eine 1-proj. Ebene, steht also $\perp$ xy-Ebene)

$\Rightarrow$ · Schnittpunktbestimmung: $(-1)\cdot(2+3t_3) - 1\cdot(0+6t_6) + 0\cdot(3+15t_3) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -3 = 9t_3$

$\Leftrightarrow \quad \underline{t_6 = -1/3}$

$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{g_3}(-1/3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S = (1 | -2 | -2)}}$

· Schnittwinkelbestimmung: $\underline{\varphi} = \arcsin\left(\dfrac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{270}} \right)$

$= \arcsin\left(\dfrac{|-3-6|}{\sqrt{540}} \right) = \underline{\underline{22{,}786^\circ}}$

④ für E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $P = (1|2|3) \in E$

a) $Q = (0|2|5)$, mit $d(Q, E) \overset{!}{=} 2$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5+a^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad -2 + 2a = 2\sqrt{5+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a - 1 = \sqrt{5+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 = 5 + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = -2}}$$

b) aus a) folgt für E: $2x + y - 2z + d = 0$

$\parallel$ durch $R = (5|1|-2)$

$$\Rightarrow 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{d = -15}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F = 2x + y - 2z - 15 = 0}}$$