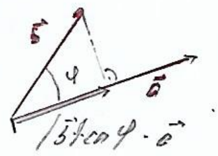
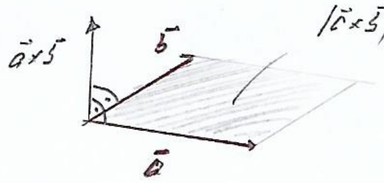
mit $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{= \, a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad \vec{a}\times\vec{b} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$





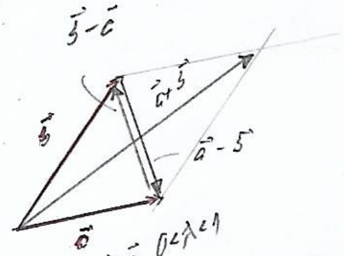
Geometrie-Aufgaben: *Vektorgeometrie Repetionsserie Teil 1*

Grundlagen der Vektorgeometrie:

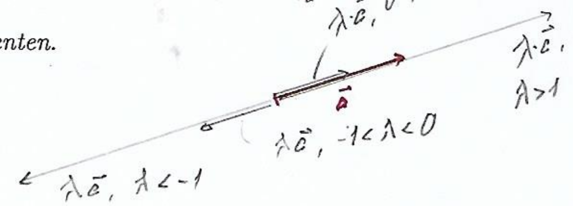
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{a} \pm \vec{b} := \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$

$\lambda\cdot\vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$



1. Definiere die folgenden Begriffe:
   - Vektor, ist eine gerichtete Grösse
   - Addition/ Subtraktion/ skalare Multiplikation von Vektoren,
   - Zusammenhang von *Koordinaten* und *Komponenten*.
   - Skalar- & Vektorprodukt



2. Gegeben sind die folgenden Grössen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \lambda = 0.25$$

Berechne (wenn überhaupt möglich):

(a) $\vec{a} + (\vec{b}\times\vec{c}) - \lambda\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 0.75 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

(c) $(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \lambda + (\vec{c}\cdot\vec{d}) = -1.25$

(d) $(\vec{a}\times\vec{b}) + \lambda + (\vec{c}\times\vec{d}) =$ ↯

(e) $(\vec{a}\times\vec{b}) - (\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}}$

(f) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$

(g) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

(h) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c}) =$ ↯

(j) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d} = -42$

(k) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{d} = -16$

(l) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{d} =$ ↯

(m) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) - \lambda\cdot\vec{d} =$ ↯

(n) $\vec{a} - (\vec{b}\times\vec{c}) + \lambda\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 5.5 \\ 3.25 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(4) Beweis: z.z. ist: $(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$, mit $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$

$$(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}c_y b_z-c_z b_y\\c_z b_x-c_x b_z\\c_x b_y-c_y b_x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$$

$$=(c_y b_z-c_z b_y)\cdot c_x+(c_z b_x-c_x b_z)\cdot c_y+(c_x b_y-c_y b_x)\cdot c_z$$

$$=c_y b_z c_x-c_z b_y c_x+c_z b_x c_y-c_x b_z c_y+c_x b_y c_z-c_y b_x c_z=0$$

4. Beweise: $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$

5. Gegeben sind die folgenden Grössen:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\12\end{pmatrix}$$

Löse die folgenden Gleichungen:

(a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{x}=\vec{0}$ $\iff$ $\vec{x}=-(\vec{c}+\vec{b})=\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$

(b) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{x}=\vec{0}$ $\iff$ $\vec{x}=(\vec{c}+\vec{b})=\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$

(c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{x}=\vec{0}$ $\iff$ $\vec{x}=-(\vec{c}+\vec{b})=\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$

(d) $\vec{a}-x\cdot\vec{b}=\vec{0}$ $\iff$ $\vec{c}=x\cdot\vec{b}$ $\iff$ $x=-\frac{1}{2}$

(e) $\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{b}=\vec{0}$ $\lightning$

(f) $x\cdot\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ $\iff$ $x\cdot\vec{c}=\vec{b}$ $\iff$ $x=-2$

(g) $x\cdot\vec{a}+\vec{b}=0$ $\iff$ $x\cdot\vec{c}=-\vec{b}$ $\iff$ $x=2$

6. Wir betrachten die folgenden Punkte:

$$A=(2/1/-3),\quad B=(-3/0/1),\quad C=(7/-1/-1)$$

(a) Bestimme $\vec{AB}$, $=\begin{pmatrix}-5\\-1\\4\end{pmatrix}$

(b) Bestimme den Mittelpunkt (M) der Strecke $\overline{BC}$, $M=(2/-\frac{1}{2}/0)$

(c) Bestimme alle Innenwinkel des Dreiecks ΔABC, $\alpha=113{,}760°$, $\beta=30{,}870°$, $\gamma=35{,}370°$

(d) Bestimme den Umfang des Dreiecks ΔABC, 22,472

(e) Bestimme auf zwei verschiedene Arten den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC, 17,037

(f*) Bestimme den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ΔABC,

(g*) Bestimme die Koordinaten eine Punktes P, der in einer Entfernung von 13 über dem Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ΔABC liegt. } → Theorie

7. Wir betrachten einen *geraden Kreiskegel*, dessen Grundfläche (in der xy-Ebene liegt und auf M) durch die Punkte $A=(5/-1/-2)$, $B=(1/-3/2)$ und $C=(5/0/1)$ definiert ist und dessen Spitze in $S=(13/-14/4)$ liegt.
- Berechne die Oberfläche und das Volumen des Kreiskegels.
- Zeige weiter, dass S (wirklich) senkrecht über der Mitte der Grundfläche liegt.

i) Mittelpunkt der Grundfläche $M=(3/-2/0)$

ii) Radius $r=3$ $\Rightarrow$ $A_\bigcirc=9\pi$

iii) Höhe Kegel $=|\vec{MS}|=\sqrt{260}$

$\Rightarrow$ · Volumen $=\dfrac{9\pi\cdot\sqrt{260}}{3}=151{,}970$

· Oberfläche $=182{,}852$

Beweis: z.z. ist: $\vec{MS}\cdot\vec{MA}=0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x = -3,\ z = 3}$$

(Seitenlänge = 7)

$\Rightarrow \underline{\underline{U = 28}}$

$\underline{\underline{A = 49}}$

8. Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ z \end{pmatrix}$ spannen ein Quadrat auf.
   Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Quadrats.

<u>2. Lsg.:</u> $\underline{x = -1.5,\ z = 1.5}$

$\underline{\underline{U = 29.462,\quad A = 54.25}}$

9. Formuliere & beweise die folgenden Sätze:
   - *der Höhensatz,*
   - *der Kathetensatz,*
   - *der Satz des Pythagoras.*

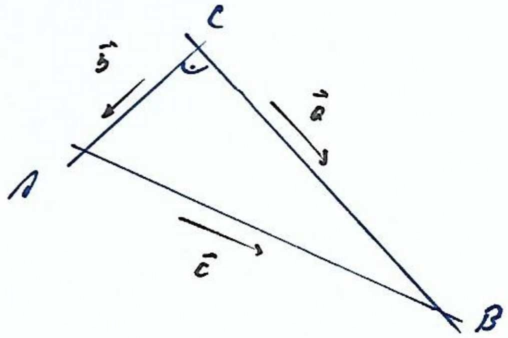
Weitere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen sind zu finden auf

http://sos-mathe.ch

Satzgruppe des Pythagoras

Vektorielle Beweisführung

Satz des Pythagoras. In jedem rw Δ gilt: $a^2 + b^2 = c^2$



Mit $\vec{a} := \vec{CB}$, $\vec{b} := \vec{CA}$, $\vec{c} := \vec{AB}$ folgt:

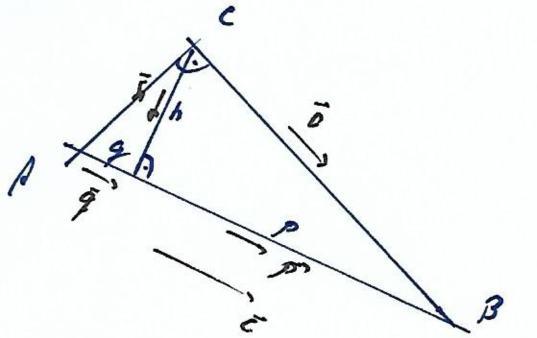
$$a^2 + b^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \overset{!}{=} \vec{c}^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} + \vec{b}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \qquad \square$$

Kathetensatz. In jedem rw Δ gilt: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$
(mit den anliegenden Hypotenusenabschnitten)



mit $\vec{a} := \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{a} := \vec{h} + \vec{p}$ folgt:

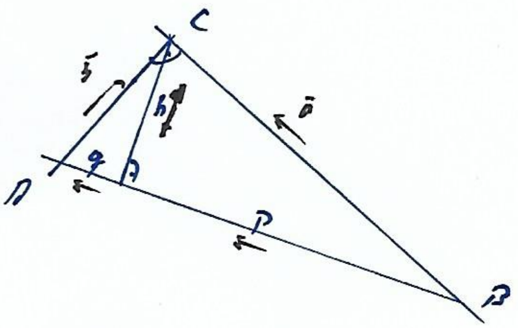
$$a^2 = \vec{a}^2 = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{h} + \vec{p})$$

$$= \vec{b}\cdot\vec{h} + \vec{b}\cdot\vec{p} + \vec{c}\cdot\vec{h} + \vec{c}\cdot\vec{p}$$

$$= \underbrace{\vec{b}\cdot\underbrace{(\vec{h} + \vec{p})}_{=\vec{a}}}_{=0} + \underbrace{\vec{c}\cdot\vec{h}}_{=0} + \underbrace{\vec{c}\cdot\vec{p}}_{=c\cdot p}$$

$$= c \cdot p. \qquad \square$$

Höhensatz. In jedem rw Δ gilt: $h^2 = p \cdot q$



mit $\vec{a} := \vec{BC}$, $\vec{b} := \vec{AC}$ ... folgt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{h} + \vec{p}) \cdot (\vec{h} - \vec{q})$$

$$= \vec{h}^2 - \underbrace{\vec{h}\cdot\vec{q}}_{=0} + \underbrace{\vec{p}\cdot\vec{h}}_{=0} - \vec{p}\cdot\vec{q} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$= h^2 - p \cdot q \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 = p \cdot q$$