Matrizenrechnung -
Grundbefehle für die Anwendung von Mathematica

Im Folgenden geht es nur um eine Zusammenstellung einiger wichtiger Befehle und Schreibweisen für den Umgang mit Matrizen im Zusammenhang mit linearen Gleichungssysteme:

Das Erfassen von Vektoren & Matrizen:

```
In[1]:= a = {1, 2, 3}
        b = {x, y, z}
        A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}
        B = {{1, 0, 2}, {3, 2, 1}}

Out[1]= {1, 2, 3}

Out[2]= {x, y, z}

Out[3]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

Out[4]= {{1, 0, 2}, {3, 2, 1}}
```

Für die Darstellung in der "üblichen" Form:

```
In[5]:= MatrixForm[a]
        MatrixForm[b]
        MatrixForm[A]
        MatrixForm[B]
```

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Rechnen mit Vektoren:
(und der Ausgabe des Resultates in der üblichen Schreibweise)

In[9]:=
```
MatrixForm[a + b]
MatrixForm[a - b]
```

Out[9]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1+x \\ 2+y \\ 3+z \end{pmatrix}$$

Out[10]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ 3-z \end{pmatrix}$$

Für das Berechnen des Skalarproduktes gilt:

In[11]:=
```
a.b
```

Out[11]= $x + 2y + 3z$

Für das Berechnen des Vektorproduktes gilt:

In[12]:=
```
MatrixForm[Cross[a, b]]
```

Out[12]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} -3y+2z \\ 3x-z \\ -2x+y \end{pmatrix}$$

Für die Matrizenmultiplikation gilt:

In[13]:=
```
MatrixForm[A.B]
```

Dot::dotsh : Tensors {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}} and {{1, 0, 2}, {3, 2, 1}} have incompatible shapes. ≫

Out[13]//MatrixForm=
```
{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}.{{1, 0, 2}, {3, 2, 1}}
```

und wenn die Multiplikation auch definiert sein soll, muss die Reihenfolge berücksichtigt werde:

In[14]:=
```
MatrixForm[B.A]
```

Out[14]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

In[15]:=
```
MatrixForm[A.b]
```

Out[15]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \\ 7x+8y+9z \end{pmatrix}$$

Die weiteren klassischen Operationen mit Mathematica:

Das Bestimmen der Transponierten:

In[16]:=
```
MatrixForm[Transpose[A]]
```

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Das Bestimmen der Inverse und der Determinante:

In[17]:=
```
MatrixForm[Inverse[A]]
```

Inverse::sing : Matrix {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}} is singular. ≫

Out[17]//MatrixForm=
```
Inverse[{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}]
```

Das bedeutet, dass unsere Matrix nicht-invertierbar ist und die Determinante somit verschwinden sollte:

In[18]:=
```
Det[A]
```

Out[18]= 0

Wir brauchen somit noch ein weiteres Beispiel einer Matrix, dieses mal soll sie invertierbar sein:

In[19]:=
```
M = {{1, 2, 1, 0}, {-1, 1, 1, 2}, {0, 2, -2, 1}, {1, -1, 0, 1}};
MatrixForm[M]
MatrixForm[Inverse[M]]
```

Out[20]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{29} & -\frac{7}{29} & \frac{1}{29} & \frac{13}{29} \\ \frac{7}{29} & \frac{1}{29} & \frac{4}{29} & -\frac{6}{29} \\ \frac{6}{29} & \frac{5}{29} & -\frac{9}{29} & -\frac{1}{29} \\ -\frac{2}{29} & \frac{8}{29} & \frac{3}{29} & \frac{10}{29} \end{pmatrix}$$

... und die Kontrolle:

In[22]:=
```
MatrixForm[M.Inverse[M]]
```

Out[22]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Und nun zu den Gleichungssystemen:

Vorerst wollen wir alle definierten Variablen löschen...

In[23]:=

```
Remove["Global`*"]
```

... und ein neues Beispiel konstruieren:

$$\begin{aligned} 1\,r + 2\,s - 3\,t - u &= 2 \\ s + t - u &= -3 \\ -2\,r + t + u &= -1 \\ 2\,r - s + 3\,t + u &= 1 \end{aligned}$$

Dies führt auf die folgenden neu zu definierenden Grössen:

In[24]:=

```
A = {{1, 2, -3, -1}, {0, 1, 1, -1}, {-2, 0, 1, 1}, {2, -1, 3, 1}};
x = {r, s, t, u};
b = {2, -3, -1, 1};
MatrixForm[A]
MatrixForm[A.x]
MatrixForm[b]
```

Out[27]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[28]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} r + 2\,s - 3\,t - u \\ s + t - u \\ -2\,r + t + u \\ 2\,r - s + 3\,t + u \end{pmatrix}$$

Out[29]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Lösen mit Hilfe der Inversen:

In[31]:=

```
MatrixForm[Inverse[A].b]
```

Out[31]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Lösen mit Hilfe des Gauss-Algoritmus:

Wir brauchen die augmentierte Matrix...

In[32]:=

```
B = {{1, 2, -3, -1, 2}, {0, 1, 1, -1, -3},
    {-2, 0, 1, 1, -1}, {2, -1, 3, 1, 1}} // MatrixForm
```

Out[32]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

... lassen Umformen...

In[33]:= `RowReduce[B]`

In[34]:= $\text{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Out[34]= `{{1, 0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, -1}, {0, 0, 0, 1, 2}}`

... und stellen in der uns gewünschten Form dar:

In[35]:= `MatrixForm[%]`

Out[35]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

oder lösen ganz ganz einfach:

In[36]:= `LinearSolve[A, b]`

Out[36]= `{1, 0, -1, 2}`

Aufgaben:

Löst als Uebung zur Anwendung vom *Mathematica* die Serien 1-3 nochmals durch...
und ergänzt die .nb-Unterlagen mit dem *Mathematica*-Befehl, um Matrizen zu potenzieren.

Gruss
RB