Bünder Kantonsschule
Arosastr. 2
7000 Chur

MATURA 2009 (25. Mai 2009)

NAME : . . . . **VORNAME : . . . .**

Klassen: *6Gdk*

Fach: *Mathematik*

Fachlehrer: *R. Balestra*

Erlaubte Hilfsmittel: · graphikfähiger Taschenrechner (TI 89, TI Voyage)
· persönliche Formelsammlung (gemäss Absprache)

Beachte den folgenden Artikel aus der *Verordnung über das Gymnasium*, welche den Einsatz von Hilfsmitteln an der Maturitätsprüfung regelt:

Art.20 Als Hilfsmittel an den Prüfungen sind die in der Klasse eingeführten, in der Regel einsprachigen Wörterbücher, Formelsammlungen und elektronischen Taschenrechner zulässig. Die zugelassenen Hilfsmittel sind vor der Prüfung den Kandidatinnen und Kandidaten bekannt zu geben.

Art.21 Die Benützung unerlaubter Hilfsmittel sowie jede Unredlichkeit hat den Ausschluss von der Prüfung zur Folge. Bereits abgelegte Teilprüfungen werden nicht bewertet und die Prüfung gilt als nicht bestanden.
Diese Bestimmung wird den Kandidatinnen und Kandidaten vor der Prüfung im Wortlaut bekanntgegeben.

- **Für die Lösung jeder Aufgabe ist eine neue Seite zu verwenden.**
- **Auf eine saubere und klare Darstellung wird geachtet.**
- **Die Schlussresultate sind doppelt zu unterstreichen und auf drei Stellen zu runden.**
- **Beweise sind ohne TR zu führen**

MATURA 2009 (25. Mai 2009)

NAME : .... **VORNAME : ....**

warm up

1. (10) Für das *warm up* betrachten wir die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{2}{x-2}$$

   (a) Bestimme den Funktionstyp.

   (b) Skizziere den zugehörigen Graphen und bestimme die charakteristischen Grössen und Eigenschaften von $f(x)$.

   (c) Approximiere $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ durch eine Polynomfunktion.

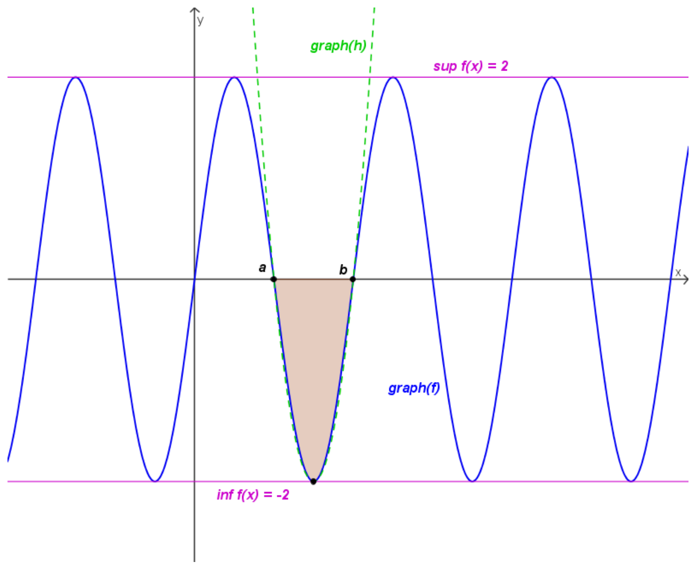
      i. Bestimme alle Koeffizienten der Polynomfunktion.

      ii. Skizziere das zugehörige Näherungspolyom 2. Grades in der obigen graphischen Darstellung.

   (d) Bestimme den Punkt $P \in graph(f)$, welcher zum Ursprung den kleinsten Abstand hat.

Differential- und Integralrechnung

2. (10) Wir betrachten die folgende graphische Darstellung einer trigonometrischen Funktion $f(x)$, welche über dem Intervall $[0, \pi]$ fünf Nullstellen hat. Für die Extremas soll gelten:
Globales Minimum = -2 und globales Maximum = 2.
Weiter ist $h(x)$ ein Parabel mit zwei Nullstellen von $f(x)$ und dem gleichen Minimum wie $f(x)$.

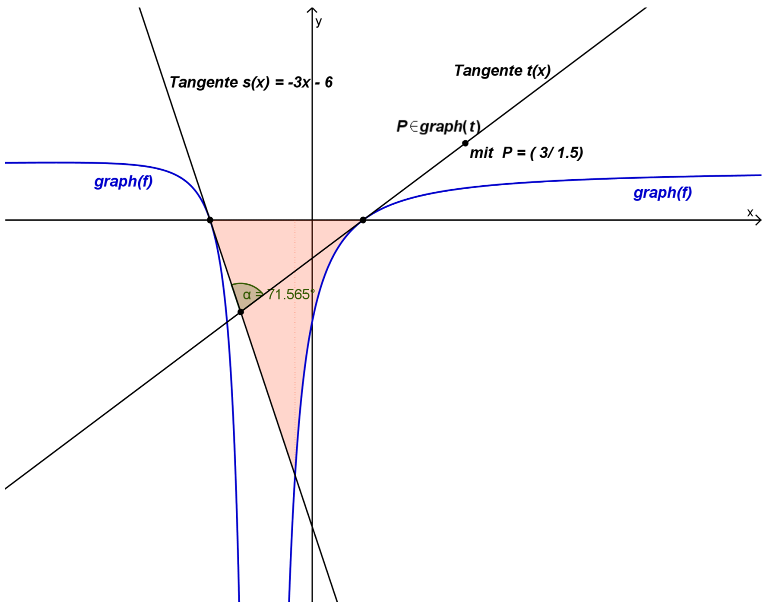


(a) Zeige *nummerisch* (die Berechnungen dürfen mit dem TR ausgeführt werden), dass der Weg von Nullstelle zu Nullstelle entlang dem Graphen von $f(x)$ kürzer ist als derjenige entlang dem Graphen von $h(x)$.
(Falls Du die Funktionsgleichung für $f(x)$ nicht bestimmen kannst, verwende $f(x) = \cos(3x)$ und skizziere Deine Situation neu.)

(b) Bestimme die Funktionsgleichung einer Parabel $l(x)$, so dass sie wieder die gleichen Nullstellen hat, aber diesesmal das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der eingefärbten Fläche (begrenzt durch den Graphen von $l(x)$ und $[a, b]$) um die x-Achse entsteht, gleich dem Volumen desjenigen Rotationskörper ist, dessen eingefärbte Fläche durch den Graphen von $f(x)$ und $[a, b]$ begrenzt ist.

(c) Beweise (diesmal wieder ohne TR), dass der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse über dem Intervall $[0, \pi]$ gleich dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $k(x) = 2\sin x$ und der x-Achse ist.
(Falls Du mit $f(x) = \cos(3x)$ arbeitest, verwende $k(x) = \cos x$)

3. (8) Wir betrachten die folgende gebrochen-rationale Funktion mit einer Polstelle in $x =$-1 und einem Zähler- und Nennerpolynom von jeweils kleinstmöglichem Grad:



Bestimme den Umfang und den Inhalt der eingefärbten Fläche.
(Wenn Du die Funktionsgleichung für $f(x)$ nicht bestimmen kannst, verwende $f(x) = \dfrac{(x-1.2)(x+2)}{(x-1)^2}$)

Beweise

4. (12) Beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

   $$\vec{a} \times \vec{b} \text{ steht senkrecht auf } \vec{b}$$

   (b) $(k+1) \cdot \binom{n}{k+1} = (n-k) \cdot \binom{n}{k}$

   (c) Die folgende Funktion

   $$f(x) = -\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{5}{24}$$

   ist über dem Intervall $[0,3]$ eine Dichtefunktion.

   (d) Die folgende Funktion

   $$f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \cos(4x)$$

   ist über dem Intervall $]0, \pi/4[$ streng monoton fallend.

Vektorgeometrie

5. (12) Wir gehen von den folgenden Punkten aus:

   $A = (1/-3/20),\ B = (2/3/-4),\ C = (-3/1/-10)$ und $P = (7/-2/-5)$

   (a) Bestimme eine Gerade, welche ...
      i. in der Ebene ABC liegt;
      ii. die Ebene ABP schneidet;
      iii. parallel zur Ebene BCP und durch den Punkt A verläuft.

   (b) Bestimme das Volumen des Tetraders $ABCP$.

   (c) Bestimme zwei verschiedene Punkte $P_{1,2}$, so dass zwei neue Tetraeder $ABCP_1$ und $ABCP_2$ enstehen, welche nur 1/3 des Volumens des Tetraeders $ABCP$ haben.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

6. (3) Viele Internetbenutzer klagen über spam-mails. Wir nehmen an, dass in 1% der guten mails und in 40% der spam-mails das Wort ParisHilton vorkommt. Ausserdem seien 10% der mails gut und 90% der mails schlecht, also sogenannte spam-mails.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine mail, in welcher das Wort ParisHilton vorkommt, eine spam-mail ist.

7. (5) Wir nehmen an, dass am Zoll jede zehnte Person zu verzollende Waren nicht deklariert.
   (a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
      i. in einer Gruppe von 10 Personen genau eine schmuggelt,
      ii. in einer Gruppe von 20 Personen genau zwei schmuggeln,
      iii. in einer Gruppe von 30 Personen mindestens drei schmuggeln.
   (b) In einem Herrenchor mit 20 Mitgliedern entdeckt eine Zöllnerin mehr als zwei Schuldige. Sie vermutet nun, dass Männer häufiger schmuggeln als der Durchschnitt.
   Was ist von dieser Vermutung zu halten ? (Begründung!)

8. (5) Eine Maschine produziert Nägel, mit normalverteilten Fehlern. Für die Länge ergibt sich ein Durchschnittswert von 25mm und eine Standardabweichung von 0.6mm.
   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Nägel produziert, deren Länge um weniger als 1mm vom Durchschnitt abweicht?
   (b) Du willst als Produzent den Kunden eine Garantie bezüglich der Länge der Nägel geben, möchtest aber höchstens 1% Reklamationen haben.
   Welchen Garantiebereich bzgl. der Länge kannst Du geben ?
   (c) Du möchtest Deinen Garantiebereich beibehalten, jedoch nur noch mit höchstens 0.5% Reklamationen rechnen müssen. Dazu planst Du den Kauf einer besseren Maschine.
   Welche Standardabweichung sollte die neue Maschine haben ?