

Kantonsschule Zürich Nord
Birchstr. 107
8050 Zürich

MATURA 2016 (7. Juni '16)

NAME :

VORNAME :

Klassen: *M6d*

Fach: *Mathematik*

Fachlehrer: *R. Balestra*

Erlaubte Hilfsmittel: · persönlicher Laptop (gemäss Absprache)

- *kleiner* Taschenrechner (gemäss Absprache)
- persönliche Formelsammlung (2 A-Seiten)

Beachte den folgenden Auszug aus dem Maturitätsprüfungsreglement:

§11: Die Schülerinnen und Schüler haben die Prüfungsarbeiten selbständig auszuführen. Bei schriftlichen Prüfungen werden sie von einer Lehrperson beaufsichtigt. Die erlaubten Hilfsmittel werden von den prüfenden Lehrpersonen im Einvernehmen mit der Schulleitung festgelegt. Die Expertinnen und Experten werden darüber sowie über notwendige Erklärungen, die vor Beginn der Arbeit gegeben wurden, informiert.

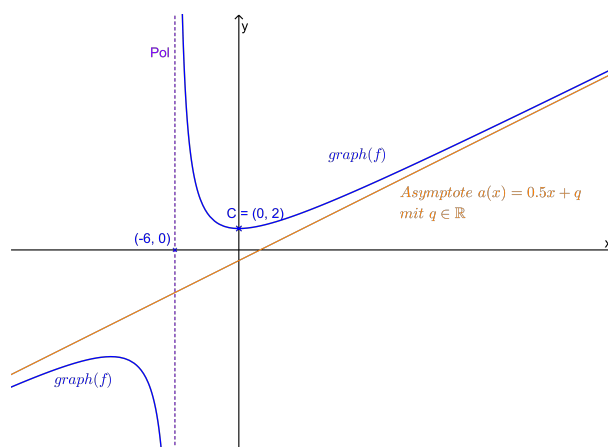
§12: Die Benützung unerlaubter Hilfsmittel sowie jede andere Unredlichkeit kann den Ausschluss von der Prüfung, die Verweigerung oder die Ungültigkeitserklärung des Maturitätszeugnisses zur Folge haben. Über den Ausschluss entscheidet die Schulleitung, über die Verweigerung oder Ungültigkeitserklärung des Maturitätszeugnisses die Schulkommission. Die Maturitätsprüfung gilt in diesen Fällen als nicht bestanden. [...]

- Für die Lösung jeder Aufgabe ist eine neue Seite zu verwenden.
- Auf eine saubere und klare Darstellung mit nachvollziehbarer Herleitung wird geachtet.
- Die Schlussresultate sind doppelt zu unterstreichen und auf drei (wesentliche) Stellen zu runden.

NAME :

VORNAME :

1. (10) Wir betrachten die folgende graphische Darstellung der Funktion $f(x)$



mit einem lokalen Maximum an der Stelle -12 und einem lokalen Minimum im Achsenabschnitt.

- (a) Bestimme eine zugehörige Funktionsgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten.

Wenn Du die Funktionsgleichung nicht bestimmen kannst, verwende für die weiteren Fragen $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 12}{x + 6}$.

- (b) Wir betrachten die Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über dem Intervall $[-5, 10]$.

- i. Bestimme den Inhalt und Umfang der Fläche A .
- ii. Bestimme das Volumen und die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation von A um die x -Achse entsteht.

- (c) Bestimme den maximalen Flächeninhalt eines Rechtecks, das vollständig in A liegt und deren eine Seite auf der x -Achse liegt.

2. (8) Wir betrachten ...
die folgende Bahnkurve eines Massepunktes (*mit konstanter Masse*):

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

und Definition:

Def.: Die **Länge** $l_{\vec{r}}$ einer Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ von $\vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}(t_2)$ ist wie folgt definiert:

$$l_{\vec{r}} := \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt$$

- Skizziere den Verlauf der Kurve.
- Auf welche Höhe über der xy -Ebene befindet sich der Massepunkt, wenn er eine Strecke von 50 zurückgelegt hat (ausgehend von $t_0 = 0$) ?
- Wie viele Male hat er auf dem Weg zu dieser Höhe die yz -Ebene geschnitten ?
- Unter welchem Winkel hat er das erste Mal die xz -Ebene geschnitten ?
- Beweise oder widerlege:

Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht auf dem Beschleunigungsvektor.

3. (5) Wir betrachten das folgende AWP:

$$u'' + 0.125u' + u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0$$

- (a) Charakterisiere die Differentialgleichung.
- (b) Was für eine physikalische Situation wird dargestellt ?
- (c) Bestimme die Lösung des AWP's und skizziere sie über dem Intervall $[0,15]$.

4. (5) Wir betrachten die folgende Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ax^2(1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

- (a) Bestimme die zugehörigen Kennzahlen.
- (b) Berechne $P(-1 \leq X \leq 1)$
- (c) Beweise oder widerlege, dass die zugehörige Verteilungsfunktion streng monoton verläuft.

NAME :

VORNAME :

5. (7) Löse das folgende AWP:

$$y' = y^2 \cdot x \cdot \sin(x) , \text{ mit } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

und bestimme die möglichen Extremalstellen der Lösung.

6. (5) Berechne:

$$(a) \int \frac{\ln x}{x^5} dx =$$

$$(b) \int \cos^2 t dt =$$

7. (3) Wir betrachten das *einfache Streuungsintervall* I_1 einer Normalverteilung:

$$I_1 := [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$$

Beweise, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable im einfachen Streuungsintervall liegt, 0.6826 ist.

8. (4) Wir gehen von einem Sportwettkampf mit 2200 Teilnehmern aus, die alle eine Urinprobe abgeben müssen. Die Proben werden jeweils in eine A - und eine B -Probe aufgeteilt. 55 Teilnehmer dieses Wettkampfes sind gedopt.

Der Test hat folgenden Eigenschaften:

- Ist ein Sportler gedopt, so zeigt dies der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_e = 80\%$ an. Der Befund des Tests ist somit positiv. p_e ist die sogenannten *Sensitivität* des Tests.
- Hat ein Sportler sich korrekt verhalten, so bestätigt das der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_a = 95\%$.
Wir sprechen in diesem Fall von der sogenannten *Spezifität* des Test.

Liegt ein positiver Befund der A -Probe vor, wird die B -Probe analysiert. (beide Male mit dem gleichen Testverfahren)

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, ...

- (a) dass über eine zufällig ausgewählte Person nach der A -Probe ein falsche Urteil abgegeben wird.
- (b) dass ein Sportler, bei dem beide Tests positiv ausgefallen waren, dennoch nicht gedopt war.

9. (10) Der ZVV geht von einem Anteil an Schwarzfahrern am gesamten Fahrgastaufkommen von 3% aus.
Zwei Kontrolleure steigen für einen Kontrollgang am Zehntenhausplatz in einen Bus der Linie 62 ein und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Glaubtenstrasse steigen sie in die Linie 32 um und kontrollieren weitere 18 Gäste.
- (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- i. die Kontrolleure bei beiden Kontrollen zusammen genau zwei Schwarzfahrer ermitteln,
 - ii. die Kontrolleure bei beiden Kontrollen mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.
 - iii. die Kontrolleure erst in der Linie 32 auf den ersten Schwarzfahrer treffen.
- (b) Wie viele Schwarzfahrer können die Kontrolleure auf ihrem Kontrollgang erwarten ?
- (c) Wie viele Fahrgäste müssen überprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Schwarzfahrer erwischt wird ?
- (d) Der ZVV geht davon aus, dass er 10% der Schwarzfahrer erwischt. Ein Schwarzfahrer muss Fr. 40.- erhöhtes Beförderungsentgelt (Fahrpreis + Strafe) bezahlen. Hat er nur sein GA vergessen, muss er eine Bearbeitungsgebühr von Fr. 5.- bezahlen. Dieser Fall tritt bei der Hälfte der Schwarzfahrer ein. Durch jeden nicht erwischten Schwarzfahrer entgehen dem ZVV im Schnitt Einnahmen in der Höhe von Fr. 3.-
Untersuche, ob das erhöhte Beförderungsentgelt angehoben werden muss, um die erwarteten Verluste, die durch die Schwarzfahrer entstehen, auszugleichen. (Die Kosten für die Kontrolleure sollen unberücksichtigt bleiben.)