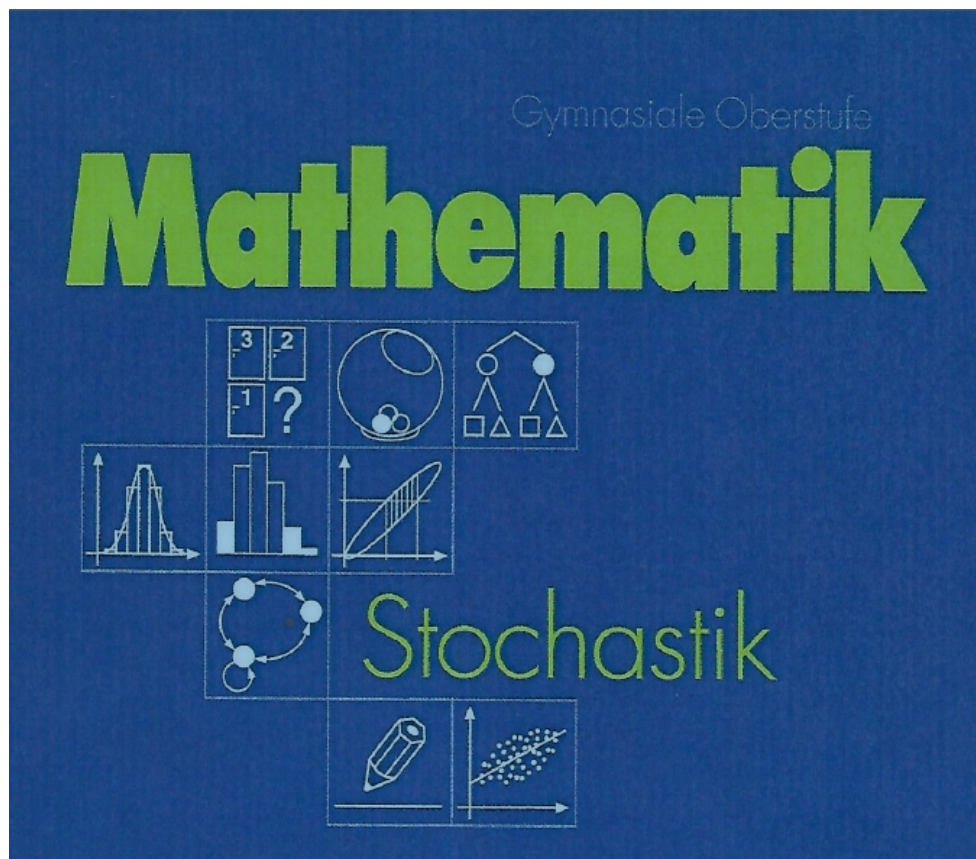


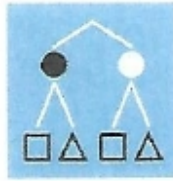
Ein Beispiel mit ausführlich beschriebenem Lösungsweg  
zum Thema

***Bedingte Wahrscheinlichkeit***

aus der Mathematik für die Gymnasiale Oberstufe  
*Stochastik*  
des Cornelson-Verlag



# 3 Entscheiden



*In diesem Kapitel werden Methoden eingeführt, mit denen Entscheidungen über das Vorliegen von Sachverhalten gefällt werden können, wenn hierzu bestimmte Informationen vorliegen.*

## 3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

### A1 Was bedeutet ein positiver AIDS-Test?

#### Susans Alptraum <sup>1)</sup>

Mitte der neunziger Jahre wurde im Rahmen einer medizinischen Routineuntersuchung bei Susan, einer 26-jährigen allein erziehenden Mutter, auch überprüft, ob bei ihr eine HIV-Infektion vorliegt. Sie nahm zwar illegale Drogen, spritzte sie aber nicht intravenös. Daher glaubte sie nicht, dass der „AIDS-Test“ bei ihr positiv ausfallen könnte. Doch einige Wochen später wurde ihr genau dieses Ergebnis mitgeteilt – was damals fast einem Todesurteil gleichkam. Susan war schockiert und verzweifelt. Das Testergebnis sprach sich herum, und ihre Kollegen vermieden es aus Angst vor Ansteckung sogar, ihr Telefon anzufassen. Schließlich verlor sie ihre Arbeitsstelle. Bald darauf zog sie in ein Heim für HIV-Infizierte. Dort schlief Susan mit einem Mitbewohner – ohne Kondom, denn sie dachte sich: „Wieso soll ich noch aufpassen, wenn ich doch schon infiziert bin?“ Aus Sorge um die Gesundheit ihres inzwischen siebenjährigen Sohnes hörte Susan auf, ihn zu küssen, und überlegte auch, ob sie sein Essen beim Zubereiten überhaupt noch anfassen durfte. Die Distanz, die sie zu ihm aufbaute – im festen Glauben, ihn dadurch zu schützen –, belastete sie sehr. Einige Monate später bekam sie eine Bronchitis, und der sie behandelnde Arzt bestand darauf, den HIV-Test zu wiederholen. „Was soll's?“, dachte sie sich.

Diesmal war das Ergebnis negativ, war sie also gar nicht infiziert? Daraufhin wurde Susans ursprüngliche Blutprobe noch einmal überprüft, und siehe da: Auch diesmal war das Resultat negativ. Was war geschehen? Als man beim ersten Mal die Daten in den Computer der Klinik im US-Bundesstaat Virginia eingegeben hatte, wurde offenbar das Ergebnis ihrer Blutprobe mit dem eines anderen Patienten verwechselt, der wirklich HIV-positiv war. Dieser gravierende Fehler stürzte nicht nur Susan grundlos in tiefe Verzweiflung, sondern wiegte den anderen Patienten in trügerischer Sicherheit.

Die Tatsache, dass ein HIV-Test ein falsch-positives Ergebnis haben kann, war für Susan völlig neu. Keiner der Verantwortlichen hatte sie je darüber informiert, dass den Labors, die an jeder Blutprobe zwei HIV-Tests durchführen (den ELISA- und den Western-Blot-Test), gelegentlich Fehler unterlaufen können. Stattdessen wurde ihr mehrfach gesagt, dass die Ergebnisse der HIV-Tests unumstößlich seien. Der erste Test könne zwar falsch-positiv ausfallen, aber weil in ihrem Fall der zweite, der „Bestätigungstest“, ebenfalls positiv gewesen sei, stehe die Diagnose absolut fest.



Als ihr Leidensweg schließlich endete, hatte Susan neun Monate lang unter dem Damoklesschwert einer niederschmetternden Diagnose gelebt, nur weil ihre Ärzte zu Unrecht glaubten, die HIV-Tests seien fehlerlos. Sie verklagte die Ärzte, weil diese ihr eine Illusion der Gewissheit gaben, unter der sie leiden musste. Schließlich wurde ihr eine großzügige Entschädigung zugesprochen, von der sie ein Haus kaufen konnte. Sie hörte zudem auf, Drogen zu nehmen, und wandte sich der Religion zu. Der Albtraum hatte ihr Leben völlig verändert.

Ein extrem seltener Einzelfall? Das hat den Anschein, wenn man sich vor Augen führt, wie gering die Wahrscheinlichkeit falscher Testergebnisse ist:

Ungefähr 0,01 Prozent der Männer, von denen kein riskantes Verhalten bekannt ist, sind mit HIV infiziert (Grundanteil). Wenn einer dieser Männer das Virus in sich hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,9 Prozent, dass der Test bei ihm positiv ausfällt (Sensitivität). Wenn der Betreffende nicht infiziert ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,99 Prozent, dass der Test bei ihm negativ ausfällt (Spezifität).

Stellen Sie sich vor, 100 000 Männer (ohne riskante Lebensweise) würden sich einem HIV-Test unterziehen. Wie viele Männer sind davon infiziert und wie viele haben statistisch ein falsch-positives bzw. ein richtig-positives Testergebnis?

Ein Mann, der keiner Risikogruppe angehört, erhält ein positives HIV-Testergebnis. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich infiziert ist?

### Veranschaulichung durch absolute Häufigkeiten

Wir bearbeiten Auftrag **A1** und ermitteln, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Mann, der – ohne einer Risikogruppe anzugehören – einen positiven AIDS-Testergebnis erhalten hat, auch wirklich infiziert ist. Zunächst bestimmen wir die relative Häufigkeit als Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Von einer Stichprobenmenge von 100 000 Männern sind nach Voraussetzung 0,01 % infiziert (HIV-positiv). Das sind dann  $0,01\% \cdot 100\,000 = 0,0001 \cdot 100\,000 = 10$  Männer. Die übrigen 99 990 sind nicht infiziert (HIV-negativ).

Bei den 10 infizierten Männern ergibt der Test mit 99,9 % Wahrscheinlichkeit einen positiven Befund. Rein rechnerisch ergibt sich  $99,9\% \cdot 10 = 9,99$ , es ist also anzunehmen, dass bei allen 10 der Test positiv ausfällt.

Bei den 99 990 nicht infizierten Männern fällt der Test mit 99,99 % (zutreffend) negativ aus, jedoch zu 0,01 % (unzutreffend) positiv. Die Anzahl der Testpersonen mit positivem, aber falschem Befund beträgt also etwa  $0,01\% \cdot 99\,990 = 0,0001 \cdot 99\,990 = 9,999 \approx 10$ .

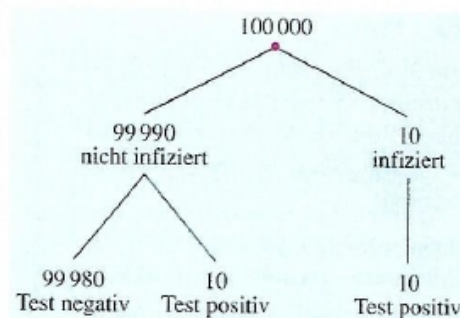


Bild 106/2: Baum mit absoluten Häufigkeiten

Hieraus ergibt sich das Baumdiagramm von Bild 106/2.

Von den 100 000 Männern erhalten insgesamt 20 ein positives Testergebnis, von denen aber nur 10 tatsächlich infiziert sind. Wenn jemand positiv getestet wurde, ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Krankheit wirklich in sich trägt, also nur ungefähr  $\frac{10}{20} = 0,5$ .

## Ereignisbäume

Wir wollen nun versuchen, die gesuchte Wahrscheinlichkeit unmittelbar mithilfe der gegebenen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Dazu betrachten wir folgendes Zufallsexperiment:  
Von einer großen Zahl von Männern, die keiner Risikogruppe angehören, wird einer ausgewählt und einem AIDS-Test unterzogen. Setzen wir

- $A$ : Der Mann ist infiziert,
- $\bar{A}$ : Der Mann ist nicht infiziert,

so gilt nach der Voraussetzung:

$$P(A) = 0,0001; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,9999$$

Der AIDS-Test kann für den Mann zwei Ergebnisse haben:

- $B$ : Der Mann erhält ein positives Testergebnis, also den Hinweis auf HIV-Infektion;
- $\bar{B}$ : Der Mann erhält ein negatives Testergebnis, also keinen Hinweis auf HIV-Infektion.

Neben der Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  ist nun eine weitere Wahrscheinlichkeit zu berücksichtigen, nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einem tatsächlich Infizierten positiv ausfällt; sie beträgt 99,9 %. Wir sprechen in einem solchen Fall von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit**, nämlich der Wahrscheinlichkeit von  $B$  (Test positiv) unter der Bedingung  $A$  (Infektion liegt vor), geschrieben  $P(B|A)$ :

$$P(B|A) = 0,999.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer infizierten Person der Test negativ ausfällt, ist dann

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 0,001.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein negatives Ergebnis hat ( $\bar{B}$ ), wenn der Betreffende nicht infiziert ist ( $\bar{A}$ ), beträgt nach der gegebenen Information 99,99 %:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,9999, \text{ also } P(B|\bar{A}) = 0,0001.$$

Hiermit können wir einen **Ereignisbaum** zeichnen, der zunächst nach der Infektion und dann nach dem Testergebnis verzweigt (Bild 107/1).

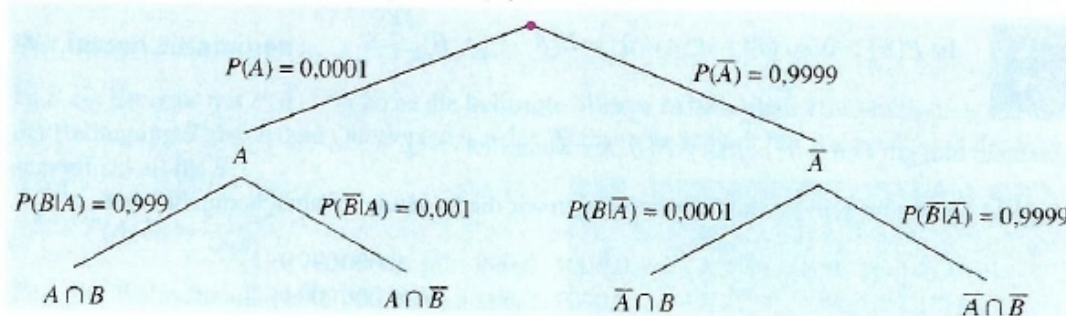


Bild 107/1

Man beachte, dass zur zweiten Teilstrecke jedes Pfades eine bedingte Wahrscheinlichkeit gehört. Zum ersten Pfad gehört das Ereignis  $A \cap B$ , für das nach der 1. Pfadregel (Seite 79) gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

## Die Umkehrung eines Ereignisbaums

Wir nehmen an, dass der HIV-Test bei dem ausgewählten Mann auf eine Infektion hinweist, dass also das Ereignis  $B$  eingetreten ist, und suchen unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit für das tatsächliche Vorhandensein einer Infektion (Ereignis  $A$ ), also  $P(A|B)$ . Dazu zeichnen wir den zum Baum von Bild 107/1 **umgekehrten Ereignisbaum**, der zuerst nach dem Testergebnis und dann nach der Infektion verzweigt (Bild 108/1).

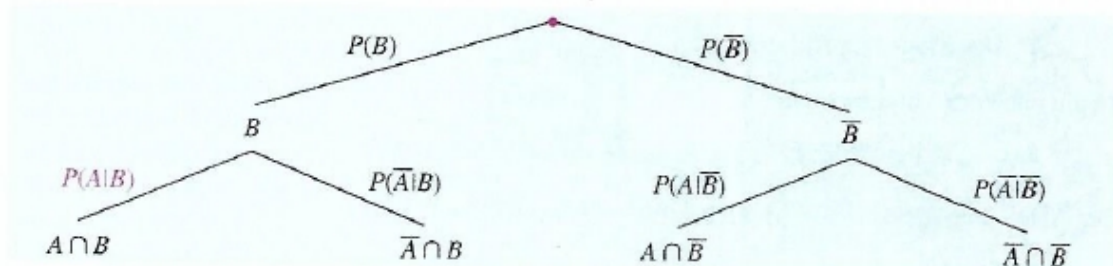


Bild 108/1

Nach der 1. Pfadregel gilt  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ . Wir lösen diese Gleichung nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  auf:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Um  $P(A|B)$  zu berechnen, haben wir also  $P(A \cap B)$  und  $P(B)$  zu bestimmen.

Wir halten aber zunächst fest:

### Definition Bedingte Wahrscheinlichkeit

3.1

Sind  $A$  und  $B$  Ereignisse und ist  $P(B) > 0$ , so heißt  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter (der Bedingung)  $B$ .<sup>1)</sup> ■

Die Definitionsgleichung für bedingte Wahrscheinlichkeiten wurde aus der 1. Pfadregel – also aus  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$  – gewonnen; bei dieser Gleichung spricht man auch vom **Produktsatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten**:

Satz  
3.1

Ist  $P(B) > 0$ , so gilt  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ . ■

Entsprechend gilt  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ , wenn  $P(A) > 0$ .

Mit Bild 107/1 und dem Produktsatz berechnen wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) = 0,0001 \cdot 0,999 = 0,0000999; \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) \cdot P(\bar{B}|A) = 0,0001 \cdot 0,001 = 0,0000001; \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0,9999 \cdot 0,0001 = 0,00009999; \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,9999 \cdot 0,9999 = 0,99980001. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Neben  $P(A|B)$  gibt es auch die Schreibweise  $P_B(A)$ .

Um  $P(A|B)$  zu ermitteln, haben wir außer  $P(A \cap B)$  noch  $P(B)$  zu bestimmen. Wir betrachten dazu noch einmal den Ereignisbaum in Bild 107/1. Das Ereignis  $B$  tritt entweder zusammen mit dem Ereignis  $A$  oder zusammen mit dem Ereignis  $\bar{A}$  ein. Es gilt also

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,000\,0999 + 0,000\,0999 = 0,000\,19989.$$

Damit folgt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,000\,0999}{0,000\,19989} \approx 0,5.$$

Dieses Ergebnis haben wir schon oben durch die Betrachtung von Häufigkeiten erhalten.

### Darstellung durch Vierfeldertafel

Ergebnisse – wie in dem untersuchten Beispiel – werden oft mithilfe von **Vierfeldertafeln** dargestellt. Solche Tafeln enthalten neben den Einzelergebnissen in der letzten Zeile die Spaltensummen und in der letzten Spalte die Zeilensummen. In der nebenstehenden Tafel sind die absoluten Häufigkeiten dargestellt, unten die Wahrscheinlichkeiten.

	Testergebnis		
	positiv	negativ	gesamt
infiziert	10	0	10
nicht infiziert	10	99 980	99 990
gesamt	20	99 980	100 000

	Testergebnis positiv	Testergebnis negativ	gesamt
infiziert	$P(A \cap B) = 0,000\,0999$	$P(A \cap \bar{B}) = 0,000\,0001$	$P(A) = 0,0001$
nicht infiziert	$P(\bar{A} \cap B) = 0,000\,09999$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,999\,80001$	$P(\bar{A}) = 0,9999$
gesamt	$P(B) = 0,000\,19989$	$P(\bar{B}) = 0,999\,80011$	1

Zu einem positiven Testergebnis gehört die linke farbige Spalte; die Wahrscheinlichkeit, positiv getestet und infiziert zu sein, ist gleich dem Verhältnis  $\frac{0,000\,0999}{0,000\,19989}$ , also ungefähr gleich 0,5.

### Wir fassen zusammen

Ist  $B$  ein Ereignis mit  $P(B) > 0$ , so ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses  $A$  unter der Bedingung  $B$  gleich dem Quotienten aus der Wahrscheinlichkeit für „ $A$  und  $B$ “ und der Wahrscheinlichkeit für  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „ $A$  und  $B$ “ (mit  $P(B) > 0$ ) gilt der **Produktsatz**:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Der Produktsatz folgt aus der 1. Pfadregel (Bild 109/1).

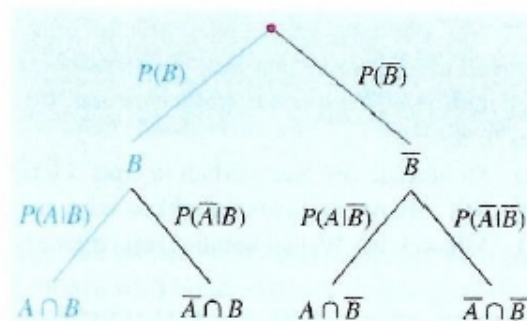


Bild 109/1