Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Abordnung von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

$$\binom{23}{5} = 33.649 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 2

Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste in 10 freien Einzelzimmern unterbringen?

$$\frac{10!}{3!} = \binom{10}{7}7! = 604.800 \qquad \text{(Variation)}$$

Aufgabe 3

Für das Elfmeterschießen muß der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz benennen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei

(a) der Bestimmung der Kandidaten?

(b) der Bestimmung der Reihenfolge der Schützen, nachdem die Kandidaten gewählt wurden?

(a)

$$\binom{11}{5} = 462 \qquad \text{(Kombination)}$$

(b)

$$5! = 120 \qquad \text{(Permutation)}$$

Aufgabe 4

Bei der Fußball-WM 1998 nahmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gab es

(a) für die Teilnehmer des Halbfinales (= Runde der letzten 4)?

(b) für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?

(a)

$$\binom{32}{4} = 35.960 \qquad \text{(Kombination)}$$

(b)

$$\frac{32!}{(32-4)!} = 863.040 \qquad \text{(Variation)}$$

Aufgabe 5

Ein Autokennzeichen werde gebildet aus

- mindestens 1, maximal 2 Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben) und
- einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 3 Ziffern (ohne die "0" an erster Stelle)

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

(a) ein Buchstabe auch mehrmals erscheinen darf?

(b) ein Buchstabe maximal einmal erscheinen darf?

(a)

$$26 \cdot 9 \cdot 10 + 26 \cdot 9 \cdot 10^2 + 26^2 \cdot 9 \cdot 10 + 26^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 694.980 \qquad \text{(Variation)}$$

(b)

$$26 \cdot 9 \cdot 10 + 26 \cdot 9 \cdot 10^2 + 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 + 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10^2 = 669.240 \qquad \text{(Variation)}$$

Aufgabe 6

Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten zur Bildung eines EDV-Passwortes gibt es, das besteht aus

- genau zwei, unterschiedlichen Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben, Groß- und Kleinschreibung ohne Bedeutung) und
- einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 4 Ziffern ("0" an erster Stelle möglich)?

$$26 \cdot 25 \cdot (10^2 + 10^3 + 10^4) = 7.215.000 \qquad \text{(Variation)}$$

Aufgabe 7

In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 8

Ein Zigarettenautomat hat 6 Fächer. Der Händler überlegt, mit welchen seiner 10 Sorten der Automat gefüllt werden soll. Wie viele verschiedene Auswahlmöglichkeiten hat der Händler, wenn die Reihenfolge der Sorten in den Fächer keine Rolle spielt und wenn eine Sorte maximal in ein Fach gefüllt werden darf?

$$\binom{10}{6} = 210 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten der Anordnung es für

(a) 4 unterschiedlich farbige Kugeln gibt.

(b) m schwarze und 1 weiße Kugel gibt.

(a)

$$4! = 24 \qquad \text{(Permutation)}$$

(b) $m+1$

Aufgabe 10

In einem Regal stehen fünf französische, sieben spanische und elf englische Bücher. Auf wie viele Arten lassen sich zwei Bücher in verschiedenen Sprachen auswählen?

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{1} + \binom{5}{1}\cdot\binom{11}{1} + \binom{7}{1}\cdot\binom{11}{1} = 167 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 11

Ein Zug besteht aus 4 Wagen der 1. Klasse, 7 Wagen der 2. Klasse, 1 Speisewagen, 2 Gepäckwagen. Wie viele unterscheidbare Wagenfolgen sind möglich

(a) wenn die Wagen beliebig eingereiht werden dürfen?

(b) wenn die Wagen der 1. Klasse nicht getrennt werden dürfen?

(a)

$$\frac{14!}{4! \cdot 7! \cdot 1! \cdot 2!} = 360.360 \qquad \text{(Permutation)}$$

(b) Betrachten die 4 Wagen der 1. Klasse als 1 Element

$$\frac{11!}{1! \cdot 7! \cdot 1! \cdot 2!} = 3960 \qquad \text{(Permutation)}$$

Aufgabe 12

Der Frosch Leo kann auf einem Papierstreifen mit nummerierten Feldern |1|2|3|...|n| ein oder zwei Felder vorwärts springen. Zu Beginn steht er in Feld 1. Auf wie viele Weisen kann Leo zum Feld n gelangen?

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{(wobei } f_n = F_n \text{ Fibonacci-Zahlen)}$$

mit $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2$.

Aufgabe 13

Man bestimme die Anzahl der 8-stelligen Wörter aus 5 Zeichen A und 3 Zeichen B, in denen die Zeichen A nicht sämtlich nebeneinander stehen.

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} - 4 = 52 \qquad \text{(Permutation)}$$

Aufgabe 14

Wie viele geordnete Teilmengen kann man aus einer Menge von 10 Elementen auswählen?

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 1024 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 15

Wie lautet der Koeffizient von $a^7b^2c^4$ in $(a+b+c)^{13}$?

$$\frac{13!}{7!2!4!} a^7b^2c^4 = 25.740 a^7b^2c^4 \qquad \text{(Multinomialkoeffizient)}$$

Aufgabe 16

Man beweise: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ für alle $n, k \geq 1$!

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

Aufgabe 17

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, mit einer Lotto-Ziehung ("6 aus 49")

(a) 3 Richtige

(b) 5 Richtige mit Zusatzzahl

zu realisieren!

(a)

$$\binom{6}{3}\binom{43}{3} = 246.820 \qquad \text{(Kombination)}$$

(b)

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{42}{1} = 252 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 18

Herr Reichlich stirbt unerwartet und nimmt das Codewort zu seinem Tresor mit ins Grab. Seine Angehörigen wissen nur, dass der Code 5-stellig ist und genau 3 Ziffern enthält, unter denen die Ziffern 0 und 4 nicht vorkommen. Wie viele Codewörter erfüllen diese Bedingung?

$$\binom{8}{3} \cdot \left[2 \cdot 3 \cdot \binom{5}{2} + 3 \cdot \binom{5}{2}\binom{3}{2}\right] = 8400$$

Aufgabe 19

Eine Firma hat 20 Angestellte, davon sind 12 männlich. Auf wieviele Arten können sie eine Arbeitsgruppe bestehend aus 5 Angestellten bilden, so dass zumindest eine Frau und ein Mann in der Arbeitsgruppe vorkommen?

$$\sum_{l=1}^{4} \binom{12}{l}\binom{8}{5-l} = 14.656 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 20

Ein Krankenpfleger muss 5 Tage die Woche arbeiten, er möchte aber entweder Samstag oder Sonntag frei haben. Wieviele Möglichkeiten hat er, seine Arbeitstage auf die Woche zu verteilen?

- Mo-Fr + Sa und 4 von {Mo,...,Fr} + So und 4 von {Mo,...,Fr}

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{4} = 11 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 21

Ein Restaurant bietet 5 verschiedene Suppen, 10 verschiedene Hauptgerichte und 6 verschiedene Nachspeisen an. Hannes hat sich entschieden höchstens eine Suppe, höchstens ein Hauptgericht und höchstens eine Nachspeise zu konsumieren. Wieviele verschiedene Menüzusammenstellungen gibt es unter diesen Voraussetzungen?

$$\left(\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\right) \cdot \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1}\right) \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1}\right) = 462 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 22

(a) Vor einem Bankschalter stehen sieben Personen und warten in einer Schlange. Wie viele verschiedene Anordnungen innerhalb der Schlange sind möglich?

(b) Wenig später öffnet der Nachbarschalter. Daraufhin wechseln vier Personen zum zweiten Schalter. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, vier von den sieben Personen in einer neuen Schlange (vor dem zweiten Schalter) anzuordnen?

(a)

$$7! = 5.040 \qquad \text{(Permutation)}$$

(b)

$$\binom{7}{4} \cdot 4! = 840 \qquad \text{(Kombination, Permutation)}$$

Aufgabe 23

An einem Judo-Turnier nehmen in der Gewichtsklasse von 70 bis 77 Kilogramm acht Kämpfer teil. Wie viele verschiedene Einzelpaarungen sind möglich?

$$\binom{8}{2} = 28 \qquad \text{(Kombination)}$$

Aufgabe 24

In der ersten Fußball-Liga eines Landes spielen in der Saison 1999/2000 15 Mannschaften um die Meisterschaft – darunter die Mannschaften Pechstadt und Glückstein.

(a) Wie viele verschiedene Platzierungs-Tabellen der Liga sind nach dem letzten Spieltag der Saison theoretisch möglich?

(b) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil (a), wenn nach dem letzten Spieltag die Mannschaft aus Pechstadt auf Platz 15 und die Mannschaft aus Glückstein auf Platz 1 liegt?

(a)

$$15! = 1,3077 \cdot 10^{12} \qquad \text{(Permutation)}$$

(b)

$$13! = 6.227.020.800 \qquad \text{(Permutation)}$$

Aufgabe 25

Ein Bit kann zwei Zustände (0 oder 1) annehmen. Ein Byte besteht aus 8 Bits (z.B. 01101011). Wie viele verschiedene Bytes gibt es?

$$2^8 = 256 \qquad \text{(Variation)}$$

Aufgabe 26

Ein Zahlenschloss besitzt fünf Ringe, die jeweils die Ziffern 0, ..., 9 tragen.

(a) Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlencodes sind möglich?

(b) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil (a), wenn in dem Zahlencode jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, d.h. der Zahlencode aus fünf verschiedenen Ziffern bestehen soll?

(c) Wie andert sich die Anzahl aus Teil (a), wenn der Zahlencode nur aus gleichen Ziffern bestehen soll?

(a)

$$10^5 = 100.000 \qquad \text{(Variation)}$$

(b)

$$\frac{10!}{5!} = 30.240 \qquad \text{(Variation ohne Wiederholung)}$$

(c) 10

Aufgabe 27

F_n bezeichne die n-te Fibonacci-Zahl mit $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, und $F_{-n} := (-1)^{n-1} F_n$. Beweisen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für $k = 0$:

$$F_{n+0} = F_n = F_0 F_{n+1} + F_{-1} F_n = (-1)^{-2} F_1 F_n = F_n$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle $k \geq 0$.

Induktionsschritt: $k \to k+1$

$$\begin{aligned} F_{n+k+1} &= F_{n+k} - F_{n+k-1} \underset{\text{IV}}{=} F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n + F_{k-1} F_{n+1} + F_{k-2} F_n \\ &= (F_k + F_{k-1}) F_{n+1} + (F_{k-1} + F_{k-2}) F_n \\ &= F_{k+1} F_{n+1} + F_k F_n \end{aligned}$$

Aufgabe 28

In einer Fabrikhalle haben acht Werkstätten Platz.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, in der Halle acht verschiedene Werkstätten einzurichten?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, in dieser Halle zwei Zuschneidestationen, zwei Drehbänke und drei Lackierstationen einzurichten? (Eine Stelle bleibt also frei.)

(a)

$$8! = 40.320 \qquad \text{(Permutation)}$$

(b)

$$\frac{8!}{2!2!3!} = 1.680 \qquad \text{(Permutation)}$$

Aufgabe 29

(a) 20 Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jeder geht alleine nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

(b) 15 Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

(c) Die 15 Ehepaare verabschieden sich folgendermaßen: Die Herren von den Herren mit Händedruck, die Damen von den Damen mit Küsschen auf beide Wangen, die Damen von den Herren mit Händedruck und Küsschen auf die rechte Wange. Die Ehepaare gehen wieder paarweise nach Hause. Wie viele Küsschen werden gegeben? Wie oft werden die Hände gedrückt?

(a) $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

(b) $\frac{15 \cdot 14 \cdot 4}{2} = 420$

(c) Anzahl Händedrücke: $\frac{15 \cdot 14 \cdot 3}{2} = 315$

Anzahl Küsschen: $\frac{15 \cdot 14 \cdot 4}{2} = 420$