Kreuz und Quer
und doch sicher richtig
eine Lernaufgabe zum Distributivgesetz

für die Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

25. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Die Rechenoperationen **4**

2 Die Rechengesetze **7**

2.1 Das Assoziativgesetz 7

2.2 Das Kommutativgesetz 8

2.3 Das Distributivgesetz 9

3 Anwendungen **14**

3.1 Was kommt zuerst ? 14

3.1.1 die * - Aufgaben 15

3.1.2 *Meine* Zusammenfassung 15

3.2 Geschickt gerechnet mit Hilfe des Distributivgesetzes 16

3.2.1 die * - Aufgaben 17

3.2.2 *Meine* Zusammenfassung 17

3.3 Geschicktes Rechnen in der Primfaktorzerlegung 18

3.3.1 die * - Aufgabe 19

3.3.2 *Meine* Zusammenfassung 19

4 *Meine* Zusammenfassung der Zusammenfassungen **20**

5 Noch offene Fragen/ Probleme ? **21**

Einleitung

Beim Rechnen *Kreuz und Quer* durch und mit den Rechenoperationen ist eine gute Kenntnis der Rechengesetze und eine richtige Anwendung derselben sehr wichtig.

Klammern setzen, weglassen, was muss angepasst und was darf nicht gemacht werden, ... das sind Fragen, welche du dir nach dem Durcharbeiten dieser Lernaufgabe nicht mehr häufig stellen musst.

Das **Ziel** dieser *Lernaufgabe* ist das Anwenden der Rechengesetze, insbesondere des Distributivgesetzes.
Mit dem Durcharbeiten dieser Aufgaben sollst du dir eine Sicherheit im Umgang mit verknüpften Rechnoperationen aneignen, welche dir im geschickten Rechnen und in den späteren Termumformungen sehr hilfreich sein wird.

Voraussetzungen sind,

dass die Begriffe schon bekannt sind.

Der *Aufbau* beginnt

- mit einer Repetition der *Rechenoperationen* und kann aufgrund der Voraussetzungen auch übersprungen werden.

  geht weiter mit

- dem Kapitel *Rechengestze*, wo die Gesetze definiert und auf Feinheiten hingewiesen wird.

  und kommt zum Wichtigsten:

- den *Anwendungen*, die ich euch sehr empfehle alle zu lösen.

  und endet mit dem AllerWichtigsten:

- mit *Eurer Zusammenfassung*

Zur *Arbeitsweise*

- Arbeitet in kleinen Gruppen (2 - 3 SchülerInnen) zusammen.
  Beachtet bitte, Gruppenarbeit heisst nicht, dass eine(r) arbeitet und die andern die Gruppe bilden.

- Wenn ihr Definitionen vergessen habt, sucht sie in euren Zusammenfassungen.

- Diskutiert eure Einträge und Lösungen.
  Kontrolliert eure Lösungen mit der Nachbarsgruppe.
  Beachtet: Das ihr wirklich die richtigen Lösungen habt liegt in eurer eigenen Verantwortung.

- Alle Aufgaben sind *ohne* TR zu lösen.

- für die Aufgaben in den Anwendungen brauchst du Papier,
  die *-Aufgaben können im Skript gelöst werden.

In der *Nachbesprechung* werden nur

- die *Beweise* und *Warums*,

- eure Bemerkungen im letzten Kapitel *Noch offene Fragen / Probleme* und

- mögliche Fehler im Text

aufgegriffen.

Viel Spass
RB

1 Die Rechenoperationen

Die Rechenoperationen sind die Vorschriften, welche dir sagen, wie du mit mathematischen Objekten arbeiten sollst.

Dazu gehört auch das Wissen über die genauen Bezeichnungen.

Aufgaben 1.1 *Ergänze die folgenden Darstellungen jeweils mit den fehlenden Definitionen und/oder Begriffen:*

Bsp.: $a + b = c$ a und b sind *Summanden*,
$a + b$ ist die *Summe*,
c ist die *ausgerechnete Summe* (von a und b) und
die Rechenoperation ist die *Addition*.

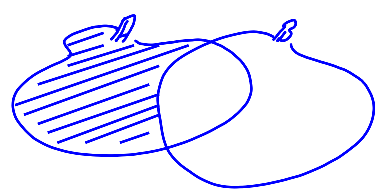
- $r - s = t$

- x ist der Divisor und y der Dividend

- w ist das ausgerechnete Produkt von p und q.

- $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{A} \,/\, x \notin \mathbb{B}\}$
  heißt die Differenzmenge von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$

  graph. Darstellung:



Wie du an der letzten Aufgabe erkennen kannst, sind die Rechenoperation nicht nur auf das Rechnen mit Zahlen beschränkt, auch mit *Mengen* lässt sicht rechnen.

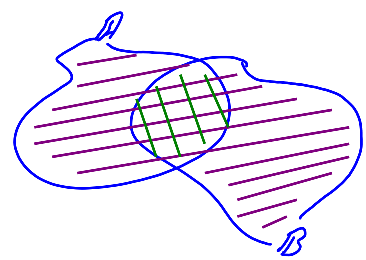
Aufgaben 1.2 *Definiere die folgenden Begriffe:*

- die Menge: (im math. Sinne) ist eine Zusammenfassung eindeutig bestimmter und wohlunterscheidbarer Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen
  (G. Cantor, 1845 - 1918)

- die Vereinigungs- & Schnittmenge:

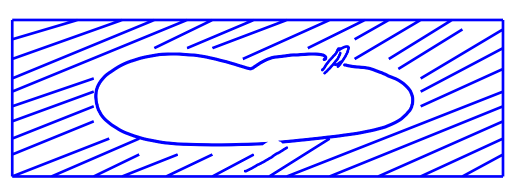
$$\underline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}} := \{x \,/\, x \in \mathbb{A} \text{ oder } x \in \mathbb{B}\}$$
$$= \{x \,/\, x \in \mathbb{A} \vee x \in \mathbb{B}\}$$

$$\underline{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}} := \{x \in \mathbb{A} \,/\, x \in \mathbb{B}\}$$



- die Komplementärmenge: (bzgl. der Grundmenge $\mathbb{G}$)

$$\underline{\mathbb{A}^c} := \mathbb{G} \setminus \mathbb{A}$$
$$= \{x \in \mathbb{G} \,/\, x \notin \mathbb{A}\}$$



Aufgaben 1.3 *Erkläre die folgende Darstellung:* $a^b = c$ $, b \in \mathbb{N}$

$$\underline{a^b} := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-mal } (b \text{ Faktoren})}$$

heißt $\underline{b\text{-te Potenz von } a}$, mit
a = $\underline{\text{Basis}}$ und b = $\underline{\text{Exponent}}$

Aufgaben 1.4 *Repetiere in der mathematischen Darstellung die Potenzgesetze:*

Aufgaben 1.5 Zeige *an einem Beispiel, dass* $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ nicht *gilt.*

2 Die Rechengesetze

Mit den *Rechengesetzen* wird festgehalten, was mit den Rechneoperationen gemacht werden darf.

Wir beginnen mit denjenigen Gesetzen, welche das Mehrfachanwenden *gleicher* Operationen behandeln.

2.1 Das Assoziativgesetz

ist das sog. *Verbindungsgesetz*.

Eine Operation heisst *assoziativ* genau dann wenn beliebig Klammern gesetzt werden dürfen.

Mathematische definiert:

<u>Def.:</u> Eine Operation $*$ heisst *assoziativ* $:\Leftrightarrow$

$$a * b * c = a * (b * c)$$

Warum ist ein Ergänzen der Definition auf

$$a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)$$

nicht notwendig ?

2.2 Das Kommutativgesetz

ist das sog. ..Vertauschungsgesetz

Eine Operation heisst *kommutativ* genau dann wenn ....

Mathematische definiert:

Def.: Eine Operation $*$ heisst *kommutativ* $:\Leftrightarrow$

......$a * b = b * a$

Aufgaben 2.1 *Liste die dir bekannten Operationen auf, welche*

1. *assoziativ,*
2. *nicht-kommutativ*

sind.

2.3 Das Distributivgesetz

Das *Distributivgesetz* erklärt die Gesetzmässigkeiten, die beim Rechnen mit *verschiedenen* Operationen gelten.
Insbesondere beim gemischten Rechnen mit Punkt- und Strichoperationen.

Wir werden im Folgenden die gängisten Situationen durchgehen:

<u>Def 1.:</u> $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel 2.1 Warum *gibt es als Schlussresultat nicht 825?*

$$\begin{aligned} 5 \cdot (10 + 15) &= 5 \cdot 10 + 5 \cdot 15 \\ &= 50 + 75 \\ &= 125 \end{aligned}$$

Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation lässt sich die 1. Definition auch wie folgt darstellen:

<u>Def 1b.:</u> $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$

Aufgaben 2.2 *Führe bei den folgenden Aufgaben alle Schritte aus:*

$$\begin{aligned} 13 \cdot (2 + 8) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot (a \cdot b + b \cdot c) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23 + 5 \cdot r) \cdot r &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Analog lässt sich das Distributivgesetz für die Multiplikation und Subtraktion definieren:

<u>Def 2.:</u> $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Beispiel 2.2 Warum *gibt es als Schlussresultat nicht 840?*

$$\begin{aligned} 6 \cdot (15 - 10) &= 6 \cdot 15 - 6 \cdot 10 \\ &= 90 - 60 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Aufgrund .... lässt sich die 1. Definition auch wie folgt darstellen:

<u>Def 2b.:</u> $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a = a \cdot b - a \cdot c$

Aufgaben 2.3 *Führe bei den folgenden Aufgaben alle Schritte aus:*

$$\begin{aligned} 13 \cdot (8 - 2) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot (a \cdot b - c) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23 - 5 \cdot r) \cdot r &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

In seiner Allgemeinheit wird das Distributivgesetz wie folgt definiert:

Def.: Zwei Operationen $*$ und $\circ$ erfüllen das Distributivgesetz $:\Leftrightarrow$

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

Und *warum* gilt für die obige Definition *nicht* auch die folgende Darstellung:

$$(b * c) \circ a = b \circ a * c \circ a = a \circ b * a \circ c$$

und *warum* werden in der Definition überhaupt Klammern verwendet ?

Aufgaben 2.4 *Untersuche ob die Distributivität auch bei der Verknüpfung der Differenzbildung mit dem Schneiden/ Vereinigen von Mengen erfüllt ist.*

Das Distributivgesetz lässt sich auch auf beliebig lange Summen, Differenzen und Kombinationen von Summen und Differenzen übertragen:

Beispiel 2.3 $a \cdot (b+c-e+f-g-h) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot e + a \cdot f - a \cdot g - a \cdot h$

Aufgaben 2.5 *Führe bei den folgenden Aufgaben wieder alle Schritte aus:*

$$\begin{aligned} 13 \cdot (8 - 2 + 4 - 12) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot (a \cdot b - a \cdot c + a^2 - 5 \cdot a) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23 - 5 \cdot r - 12 + 3 \cdot r^2) \cdot 2 \cdot r &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23 - 5 \cdot r - 12 + 3 \cdot r^2) \cdot (-2 \cdot r) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Aufgaben 2.6 *Beweise nur mit Hilfe der Rechengesetze:*

$$a \cdot (b + c - d) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$$

Wir können nun auch noch die Divison ins Spiel bringen und das Distributivgesetz wie folgt darstellen:

<u>Def.:</u> $(a + b) : c = a : c + b : c$
$(a - b) : c = a : c - b : c$

Aufgaben 2.7 *Formuliere zu jeder Situation jeweils zwei Beispiele:*

Warum können nicht automatisch auch die folgenden Definitionen gelten:

<u>Def.:</u> $a : (b + c) = a : b + a : c$
$a : (b - c) = a : b - a : c$

Ach ja, noch eine letzte Frage zu den Gesetzten:
Wie wird das Distributivgesetz auf deutsch genannt?

3 Anwendungen

Löse die folgenden Aufgaben *ohne* Taschenrechner.
Bei den * - *Aufgaben* sind alle Schritte zu begründen, d.h. alle verwendeten Rechengesetze sind anzugeben und löse diese Aufgaben im Skript.
Wichtig (wie immer): *Deine* Zusammenfasung

3.1 Was kommt zuerst ?

1. $217 + 8 \cdot 15 - 5 =$
2. $284 - 15 \cdot 12 - 27 =$
3. $800 : 40 - 30 : 3 =$
4. $(48 + 36) : (48 - 36) + 8 \cdot 4 =$
5. $82 + 9 - 5 \cdot 6 - 99 : 11 =$
6. $(2 \cdot 32 - 12 \cdot 3) : (4 \cdot 7 - 2 \cdot 12) =$
7. $4 \cdot ((18 - 12) : 2 + 1) =$
8. $2^4 - (-2)^4 =$
9. $-2^3 + (-2)^3 =$
10. $((-2)^3)^2 - (-2)^{3^2} =$

3.1.1 die * - Aufgaben

- $15 \cdot 13 - 12 \cdot 39 : (6 \cdot 13) - 2 \cdot 26 =$

- $4 \cdot ((18 - 12) : 2) + 1 =$

3.1.2 *Meine* Zusammenfassung

3.2 Geschickt gerechnet mit Hilfe des Distributivgesetzes

1. $(24 \cdot 27 - 27 \cdot 16) : 9 =$
2. $(21 \cdot 16 - 14 \cdot 3) : 7 =$
3. $564 \cdot 315 + 564 \cdot 321 + 436 \cdot 636 + 271 \cdot 364 + 729 \cdot 364 =$
4. $386 \cdot 567 + 616 \cdot 567 + 634 \cdot 436 + 368 \cdot 800 - 368 \cdot 364 =$
5. $15 \cdot 18 + 47 \cdot 18 - 18 \cdot 23 - 39 \cdot 18 =$
6. $55 + 27 \cdot 32 - 48 - 24 \cdot 32 =$
7. $(19^2 \cdot 76 - 57 \cdot 38) : 19^2 =$
8. $4 \cdot 32^3 : (16^3 - 8 \cdot 16^2) =$
9. $39 \cdot 10^{15} : 13 \cdot 10^{19} \cdot 324 \cdot 10^{17} : 108 \cdot 10^{16} =$
10. $39 \cdot 10^{35} : (13 \cdot 10^9 : 324 \cdot 10^7 \cdot 108 \cdot 10^6) =$

3.2.1 die * - Aufgaben

- $(32^2 \cdot 43 - 16^2 \cdot 86) : 8^2 - 8 =$

- $23 \cdot 19 - 19 \cdot (51 - 48) - 12 \cdot (31 - 12) =$

3.2.2 *Meine* Zusammenfassung

3.3 Geschicktes Rechnen in der Primfaktorzerlegung

1. $38 \cdot 74 + 74 \cdot 12 =$
2. $2 \cdot 169 + 8 \cdot 26 - 12 \cdot 39 =$
3. $(5 \cdot 17^2 \cdot 29^3) : (5 \cdot 17 \cdot 29^2) =$
4. $5^4 \cdot (3 \cdot 11 - 2^2 \cdot 7) =$
5. $(2^{12} - 2^{10}) \cdot 3^5 =$
6. $(7^3 \cdot 2^8 - 7^3 \cdot 2^5) : (2^3 - 1)^3 =$
7. $(13^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3) : [(7^2 - 6^2) \cdot 3 \cdot 13 \cdot 5^2] =$

8. Bestimme den ggT und den kgV:
   (a) $4880, 4881$
   (b) $13^9, 26^{10}$

3.3.1 die * - Aufgabe

- $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 =$

- $4^2 \cdot 6^3 \cdot (25 \cdot 70 + 5^2 \cdot 11) : (2^3 \cdot 3^4) =$

3.3.2 *Meine* Zusammenfassung

4 *Meine* Zusammenfassung der Zusammenfassungen

5 Noch offene Fragen/ Probleme ?