Das Rechnen mit natürlichen Zahlen

# *unsere Formeln ...*

## *erklärt, angewendet & eingübt*
## *und ergänzt mit*
## *mit der Herleitung weiterer Formeln*

eine Lernaufgabe,

eine Prüfungsvorbereitung

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

27. März 2024

## Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

Die **Ziele** dieser Zusammenstellung unserer Formeln zur

*Berechnung langer Summen von natürlichen Zahlen*

sind ...

- *die* **Erklärungen**, wie sie auszuführen sind,
- *die* **Anwendungen** an praktischen Beispielen,
- *das* **Einüben** mit Aufgaben

  und

- *die* **Ergänzung** mit einer weiteren Formel.

*Voraussetzungen* aus der Theorie sind

- die Herleitungen der Formeln,
- die Kenntnisse der Definitionen und Notationen für Begriffe wie Summanden, Produkte, ....
- die Fähigkeiten, in den Anwendungen schriftlich zu multiplizieren und zu addieren.

Es geht im Folgenden also weitgehend um ein *Üben des Umgangs mit unseren Formeln* und kann somit auch gut als Prüfungsvorbereitung verwendet werden.

Ergänzt mit drei interessanten Anwendungen, aus einer Vorlage von

Dieter Ortner

*Viel Spass*
RB

# 1 Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$

## 1.1 Die Formel

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ n = \frac{n}{2}\ \cdot\ (n+1)$$

*Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$, wobei $n$ stellvertretend für die grösste dieser natürlichen Zahlen steht, ist gleich dem Produkt von $\frac{n}{2}$ und $(n+1)$.*

## 1.2 Die Beispiele

**Beispiel 1.1** $1 + 2 + 3 + 4 +\ \ldots\ + 66 =$

Wir beginnen bei 1, die grösste Zahl ist $n = 66$,
somit folgt für die ausgerechnete Summe: $\frac{66}{2}\ \cdot\ (66+1) = \underline{\underline{2211}}$

**Beispiel 1.2** $1 + 2 + 3 + 4 +\ \ldots\ + 1000 =$

Wir beginnen bei 1, die grösste Zahl ist $n = 1000$,
somit folgt für die ausgerechnete Summe: $\frac{1000}{2}\ \cdot\ (1000+1) = \underline{\underline{500500}}$

## 1.3 Anwendungen

**Beispiel 1.3** $37 + 38 + 39 +\ \ldots\ + 66 =$

Wir beginnen *nicht* bei 1, und können somit *nicht* direkt unsere Formel anwenden!
Wir können aber unsere Formel für die Lösungsfindung anwenden, indem wir

- zuerst mit 1+2+3+ $\ldots$ + 66 *zu viel* ausrechnen,
- und anschliessend das, was wir *zu viel* summiert haben, in unserem Beispiel ist das 1+2+3+ $\ldots$ +36, wieder subtrahieren:

$$\begin{aligned}
37+38+39+\ \dots\ +66 &= (1+2+3+\ \dots\ +66) &-&\ (1+2+3+\ \dots\ +36)\\
&= \tfrac{66}{2}\cdot(66+1) &-&\ \tfrac{36}{2}\cdot(36+1)\\
&= 2211 &-&\ 666\\
&= \underline{\underline{1545}}
\end{aligned}$$

**Beispiel 1.4** $245+246+247+\ \dots+888=$

Wir beginnen wieder nicht bei 1 und können wieder nicht direkt mit unserer Formel arbeiten!
Wir können aber wieder zuerst zu viel ausrechnen, anschliessend das zu viel Ausgerechnete subtrahieren und dazu beide Male unsere Formel anwenden:

$$\begin{aligned}
245+246+247+\ \dots+888 &= (1+2+3+\ \dots\ +888) &-&\ (1+2+3+\ \dots+244)\\
&= \tfrac{888}{2}\cdot(888+1) &-&\ \tfrac{244}{2}\cdot(244+1)\\
&= 394716 &-&\ 29890\\
&= \underline{\underline{364826}}
\end{aligned}$$

## 1.4 Bemerkungen

Wichtig ist, dass

- wir für die Anwendung unserer Formel in der Summe immer bei 1 beginnen,
- wir die grösste Zahl in der Summe gleich $n$ setzen,
- die Formel auch für Summen, wo der grösste Summand ungerade ist, gilt:

  **Beispiel 1.5**

$$\begin{aligned}
21+22+23+\ \dots\ 99 &= (1+2+3+\ \dots\ +99) &-&\ (1+2+3+\ \dots\ +20)\\
&= \tfrac{99}{2}\cdot(99+1) &-&\ \tfrac{20}{2}\cdot(20+1)\\
&= 99\cdot\tfrac{99+1}{2} &-&\ \tfrac{20}{2}\cdot(20+1)\\
&= 4950 &-&\ 210\\
&= \underline{\underline{4740}}
\end{aligned}$$

## 1.5 Aufgaben

**Aufgaben 1.1** $1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + 444 =$

**Aufgaben 1.2** $200 + 201 + 202 + \ \ldots \ + 500 =$

**Aufgaben 1.3** $50 + 51 + 52 + \ \ldots \ + 200 + 201 + 202 + \ \ldots \ 300 =$

**Aufgaben 1.4** $100+101+102+ \ \ldots \ +200+301+302+303+ \ \ldots \ +400 =$

# 2 Die Summe aller geraden Zahlen von 1 bis $2n$

## 2.1 Die Formel

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$$

*Die Summe aller (natürlichen) geraden Zahlen von 2 bis $2n$, wobei $2n$ stellvertretend für die grösste dieser geraden Zahlen steht, ist gleich dem Produkt von $n$ und $n + 1$.*

## 2.2 Die Beispiele

**Beispiel 2.1** $2 + 4 + 6 + 8 + \ \ldots\ + 66 =$

Wir beginnen bei 2, die grösste Zahl ist $2 \cdot n = 66$,
somit folgt $n = 66 : 2 = \frac{66}{2} = 33$ und für die ausgerechnete Summe:
$33 \ \cdot\ (33 + 1) = \underline{\underline{1122}}$

**Beispiel 2.2** $2 + 4 + 6 + 8 + \ \ldots\ + 500 =$

Wir beginnen bei 2, die grösste Zahl ist $2 \cdot n = 500$,
somit folgt $n = 500 : 2 = \frac{500}{2} = 250$ und für die ausgerechnete Summe:
$250 \ \cdot\ (250 + 1) = \underline{\underline{62750}}$

## 2.3 Anwendungen

**Beispiel 2.3** $38 + 40 + 42 + \ \ldots\ + 66 =$

Wir beginnen *nicht* bei 2, und können somit *nicht* direkt unsere Formel anwenden!
Wir können aber unsere Formel für die Lösungsfindung anwenden, indem wir

- zuerst mit 2+4+6+ $\ldots$ + 66 *zu viel* ausrechnen,
- und anschliessend das, was wir *zu viel* summiert haben, in unserem Beispiel ist das 2+4+6+ $\ldots$ +36, wieder subtrahieren:

$$
\begin{array}{rcccc}
38+40+42+\ \ldots\ +66 & = & (2+4+6+\ \ldots\ +66) & - & (2+4+6+\ \ldots\ +36) \\
 & = & 33\ \cdot\ (33+1) & - & 18\ \cdot\ (18+1) \\
 & = & 1122 & - & 342 \\
 & = & \underline{\underline{780}} & &
\end{array}
$$

**Beispiel 2.4** $244 + 246 + 248 + \ \ldots + 888 =$

Wir beginnen wieder nicht bei 2 und können wieder nicht direkt mit unserer Formal arbeiten!
Wir können aber wieder zuerst zu viel ausrechnen, anschliessend das zu viel Ausgerechnete subtrahieren und dazu beide Male unsre Formel anwenden:

$$
\begin{array}{rcccc}
244+246+247+\ \ldots+888 & = & (2+4+6+\ \ldots\ +888) & - & (2+4+6+\ \ldots+244) \\
 & = & 444\ \cdot(444+1) & - & 122\ \cdot\ (122+1) \\
 & = & 197580 & - & 15006 \\
 & = & \underline{\underline{182574}} & &
\end{array}
$$

## 2.4 Bemerkungen

Wichtig ist, dass

- wir für die Anwendung unserer Formel in der Summe immer bei 2 beginnen,
- wir die grösste gerade Zahl $= 2 \cdot n$ setzen und somit in der Formel für $n$ die Hälfte der grössten Zahl einsetzen.

## 2.5 Aufgaben

**Aufgaben 2.1** $2 + 4 + 6 + \ \dots\ + 444 =$

**Aufgaben 2.2** $200 + 202 + 204 + \ \dots\ + 500 =$

**Aufgaben 2.3** $100 + 102 + 104 + \ \dots\ + 200 + 302 + 304 + 306 + \ \dots\ + 400 =$

**Aufgaben 2.4** $50 + 51 + 52 + \ \dots\ + 149 + 150 + 152 + 154 + 156 + \ \dots + 198 + 200 =$

# 3 Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$

## 3.1 Die Formel

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ 2 \cdot n - 1 = n^2$$

*Die Summe aller (natürlichen) ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$, wobei $2n - 1$ stellvertretend für die grösste dieser ungeraden Zahlen steht, ist gleich der 2. Potenz von $n$.*

## 3.2 Die Beispiele

**Beispiel 3.1** $1 + 3 + 5 + 7 + \ \ldots\ + 65 =$

Wir beginnen bei 1, die grösste Zahl ist $2 \cdot n - 1 = 65$,
somit folgt $n = (65 + 1) : 2 = \frac{65+1}{2} = 33$ und für die ausgerechnete Summe:
$33^2 = \underline{\underline{1089}}$

**Beispiel 3.2** $1 + 3 + 5 + 7 + \ \ldots\ + 501 =$

Wir beginnen bei 1, die grösste Zahl ist $2 \cdot n - 1 = 501$,
somit folgt $n = (501 + 1) : 2 = \frac{501+1}{2} = 251$ und für die ausgerechnete Summe:
$251^2 = \underline{\underline{63001}}$

## 3.3 Anwendungen

**Beispiel 3.3** $39 + 41 + 43 + \ \ldots\ + 65 =$

Wir beginnen *nicht* bei 1, und können somit *nicht* direkt unsere Formel anwenden!
Wir können aber unsere Formel für die Lösungsfindung anwenden, indem wir

- zuerst mit 1+3+5+ ... + 65 *zu viel* ausrechnen,
- und anschliessend das, was wir *zu viel* summiert haben, in unserem Beispiel ist das 1+3+5+ ... +37 , wieder subtrahieren:

$$
\begin{array}{rcccc}
39+41+43+\ \ldots\ +65 & = & (1+3+5+\ \ldots\ +65) & - & (1+3+5+\ \ldots\ +37) \\
 & = & 33^2 & - & 19^2 \\
 & = & 1089 & - & 361 \\
 & = & \underline{\underline{728}} & &
\end{array}
$$

**Beispiel 3.4** $245+247+249+\ \ldots +999 =$

Wir beginnen wieder nicht bei 1 und können wieder nicht direkt mit unserer Formal arbeiten!
Wir können aber wieder zuerst zu viel ausrechnen, anschliessend das zu viel Ausgerechnete subtrahieren und dazu beide Male unsre Formel anwenden:

$$
\begin{array}{rcccc}
245+247+249+\ \ldots +999 & = & (1+3+5+\ \ldots\ +999) & - & (1+3+5+\ \ldots +243) \\
 & = & 500^2 & - & 122^2 \\
 & = & 250000 & - & 14884 \\
 & = & \underline{\underline{235116}} & &
\end{array}
$$

## 3.4 Bemerkungen

Wichtig ist, dass

- wir für die Anwendung unserer Formel in der Summe immer bei 1 beginnen,
- wir die grösste ungerade Zahl $= 2\cdot n-1$ setzen und wir somit in der Formel für $n$ die Hälfte von (der grössten Zahl $+1$) einsetzen

## 3.5 Aufgaben

**Aufgaben 3.1** $1 + 3 + 5 + \ \ldots\ + 333 =$

**Aufgaben 3.2** $201 + 203 + 205 + \ \ldots\ + 501 =$

**Aufgaben 3.3** $101+103+105+ \ \ldots\ +201+301+303+305+ \ \ldots\ +401 =$

**Aufgaben 3.4** $50 + 51 + 52 + \ \ldots\ + 149 + 150 + 152 + 154 + 156 + \ \ldots +$ $198 + 200 + 201 + 203 + 205 + \ \ldots\ + 297 + 299 =$

# 4 Zwei Kugeltürme

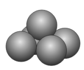
## 7. Kugelturm 1

Du hast sicher schon öfter gesehen, wie man am Gemüsemarkt Orangen oder Äpfel aufschichtet. Meist sind es pyramidenförmige Gebilde. Damit wollen wir uns nun befassen. Nicht mit den Orangen, sondern mit den Pyramiden.

Zunächst Pyramiden mit quadratischer Grundfläche.

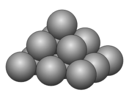
n = 1

Darüber gibt es nicht viel zu sagen, das ist eigentlich noch gar keine Pyramide.



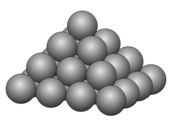
n = 2

Eine Pyramide mit n = 2 braucht 5 Kugeln.



n = 3

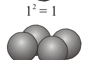
Eine Pyramide mit n = 3 braucht 14 Kugeln.



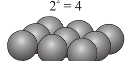
n = 4

Eine Pyramide mit n = 4 braucht 30 Kugeln.

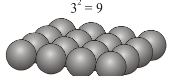
$1^2 = 1$



$2^2 = 4$



$3^2 = 9$



$4^2 = 16$

n = 4

Man sieht das am besten, wenn man sich die einzelnen „Stockwerke“ getrennt vorstellt.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

### Übungsaufgaben

15) Wie viele Kugeln braucht man für eine Pyramide mit n = 5, n = 6?
    Für n = 5 braucht man …………. Kugeln.
    Für n = 6 braucht man …………. Kugeln.

Zeige dass man mit folgender Formel die Anzahl Kugeln berechnen kann:

$$\text{Anzahl Kugeln für quadratische Pyramide} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \qquad (8)$$

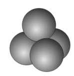
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

## 8. Kugelturm 2

Nun zu Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche.

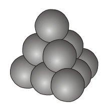
n = 1

Darüber gibt es wieder nicht viel zu sagen.



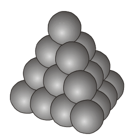
n = 2

Diese Pyramide mit n = 2 braucht 4 Kugeln.



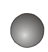
n = 3

Diese Pyramide mit n = 3 braucht 10 Kugeln.

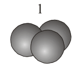


n = 4

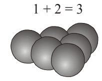
Eine Pyramide mit n = 4 braucht 20 Kugeln.



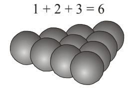
1



1 + 2 = 3



1 + 2 + 3 = 6



1 + 2 + 3 + 4 = 10

n = 4

Man sieht das wieder am besten, wenn man sich die einzelnen „Stockwerke“ getrennt vorstellt.

$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) =$
$= 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

### Übungsaufgaben

16) Wie viele Kugeln braucht man für eine Pyramide mit n = 5, n = 6?
    Für n = 5 braucht man …………. Kugeln.
    Für n = 6 braucht man …………. Kugeln.

Zeige dass man mit folgender Formel die Anzahl Kugeln berechnen kann:

$$\text{Anzahl Kugeln für dreiseitige Pyramide} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} \qquad (9)$$

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$

# 5 Die Summe der Zweierpotenzen

## 9. Die Reihe 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + …

Es handelt sich bei dieser Reihe um die Summe von Zweierpotenzen. Du weisst vielleicht: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ …

Man kann diese Reihe also auch so schreiben:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots$

$2^0 = 1$
$2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$
$2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 24$

Gibt es eine Gesetzmässigkeit?

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = ?$

Um dieses Problem zu lösen, müssen wir etwas weiter ausholen. Da brauchen wir die **Dualzahlen.**

Dualzahlen sind Zahlen mit der Basis 2. Bei Dualzahlen gibt es nur die Ziffern 0 und 1. Computer rechnen auch nur mit Dualzahlen.

| Dezimal | Dual |
|---|---|
| 0 | $0_2$ |
| 1 | $1_2$ |
| 2 | $10_2$ |
| 3 | $11_2$ |
| 4 | $100_2$ |
| 5 | $101_2$ |
| 6 | $110_2$ |
| 7 | $111_2$ |
| 8 | $1000_2$ |
| 9 | $1001_2$ |
| 10 | $1010_2$ |
| 11 | $1011_2$ |
| 12 | $1100_2$ |
| 13 | $1101_2$ |
| 14 | $1110_2$ |
| 15 | $1111_2$ |
| 16 | $10000_2$ |

| Dezimal | Dual |
|---|---|
| 17 | $10001_2$ |
| 18 | $10010_2$ |
| 19 | $10011_2$ |
| 20 | $10100_2$ |
| 21 | $10101_2$ |
| 22 | $10110_2$ |
| 23 | $10111_2$ |
| 24 | $11000_2$ |
| 25 | $11001_2$ |
| 26 | $11010_2$ |
| 27 | $11011_2$ |
| 28 | $11100_2$ |
| 29 | $11101_2$ |
| 30 | $11110_2$ |
| 31 | $11111_2$ |
| 32 | $100000_2$ |

Bemerkung: Die kleine tiefer gesetzte Zwei zeigt an, dass es sich um eine Zahl im Dualsystem handelt.
Beispiel: $101_2$ ist eine Dualzahl und hat im Dezimalsystem den Wert 5.
$10011_2$ ist eine Dualzahl und hat im Dezimalsystem den Wert 19.

Unser Dezimalsystem (mit der Basis 10) ist aufgebaut auf Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw.

Beispiel: 275 = 5 Einer + 7 Zehner + 2 Hunderter

Das Dualsystem (mit der Basis 2) besteht aus Einer, Zweier, Vierer, Achter, Sechzehner, Zweiunddreissiger …

Beispiel: $1101_2$ = 1 Einer + 0 Zweier + 1 Vierer + 1 Achter = 13

$1110_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 14$

$1111_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 15$

Und da haben wir ja schon die Reihe $1 + 2 + 4 + 8 = 1111_2$

Wir addieren eine Eins zu $1111_2$:

$1111_2 + 1_2 = 10000_2 = 16$

Demnach ist $1111_2 = 16 - 1 = 15$.

Noch ein Beispiel:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 11111_2$

$11111_2 + 1_2 = 100000_2 = 32$

Demnach ist $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 11111_2 = 32 - 1 = 31$.

Noch ein Beispiel:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 111111_2$

$111111_2 + 1_2 = 1000000_2 = 64$

Demnach ist $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 111111_2 = 64 - 1 = 63$.

$2^0 = 1$
$2^0 + 2^1 = 11_2 = 3$
$2^0 + 2^1 + 2^2 = 111_2 = 8$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1111_2 = 15$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 11111_2 = 31$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ ist eine Dualzahl bestehend aus n + 1 Einsen. Zählt man eine Eins dazu, so erhält man eine Dualzahl mit einer Eins vorne und n + 1 Nullen dahinter.

Eine Eins mit n + 1 Nullen dahinter ist im Dezimalsystem nichts anderes als $2^{n+1}$. Damit erhält man folgende Formel:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \qquad (8)$$

**Beachte:** Die Reihe hat nicht n, sondern n + 1 Summanden!

Testen wir auch diese Formel:

n = 0: $2^0 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
n = 1: $2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
n = 2: $2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^{2+1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
n = 3: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^{3+1} - 1 = 2^4 - 1 = 15$

Die Formel bewährt sich.

**Übungsaufgaben**

17) Berechne folgende Summen:

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 =$
b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 =$
c) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 =$

18) Der Erfinder des Schachspiels soll ein indischer Weiser mit Namen Sessa gewesen sein. Man erzählt sich, dass er sich dafür von seinem König Shehram folgendes als Belohnung wünschte: Auf das erste Feld des Schachbrettes sollte ein Reiskorn gelegt werden, auf das zweite Feld zwei Reiskörner, auf das dritte Feld vier Reiskörner, auf das vierte Feld 8 Reiskörner usw. Auf jedem nachfolgenden Feld also die doppelte Anzahl Reiskörner als am vorhergehenden Feld.


Dem König schien dies ein geringer Wunsch zu sein. Als er jedoch seine Hofmathematiker ausrechnen liess, wie viele Reiskörner es bräuchte, musste er bald einsehen, dass er mit seinem gesamten Reichtum diesen Wunsch nicht erfüllen konnte.

Wie viele Reiskörner würden benötigt?

**Hinweis:** Schreibe in die einzelnen Felder die Anzahl Reiskörner in Form von Zweierpotenzen, also $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$ usw.
Wie viele Reiskörner kommen dann in das letzte Feld?
Überlege dir dann, dass in jedem nachfolgenden Feld um ein Reiskorn mehr ist als in allen vorangegangenen Feldern. Wenn also das Schachbrett noch ein Feld mehr hätte, also ein 65-stes Feld, dann wären in diesem 65-sten Feld um ein Reiskorn mehr als in allen 64 vorhergehenden Feldern.

# 6 Die Lösungen zu den Aufgaben

**Aufgabe 1.1:**

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ \dots\ +444 &= \tfrac{444}{2}\cdot(444+1) \\ &= 222\cdot 445 \\ &= \underline{\underline{98'790}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.2:**

$$\begin{array}{rcccc} 200+201+202+\ \dots\ +500 & = & (1+2+3+\ \dots\ +500) & - & (1+2+3+\ \dots\ +199) \\ & = & \frac{500}{2}\cdot(500+1) & - & \frac{199}{2}\cdot(199+1) \\ & = & \frac{500}{2}\cdot(500+1) & - & 199\cdots\frac{199+1}{2} \\ & = & 125250 & - & 19'900 \\ & = & \underline{\underline{105'350}} & & \end{array}$$

**Aufgabe 1.3:**

$$\begin{array}{rcccc} 50+51+52+\ \dots\ +300 & = & (1+2+3+\ \dots\ +300) & - & (1+2+3+\ \dots\ +49) \\ & = & \frac{300}{2}\cdot(300+1) & - & \frac{49}{2}\cdot(49+1) \\ & = & \frac{300}{2}\cdot(300+1) & - & 49\cdot\frac{49+1}{2} \\ & = & 45'150 & - & 1'225 \\ & = & \underline{\underline{43'925}} & & \end{array}$$

**Aufgabe 1.4:**

$$100+101+102+\ \dots\ +200+301+302+303+\ \dots\ +400=$$

$$\begin{array}{ccccccccc} = & \Big((1+2+..+200) & - & (1+2+..+99)\Big) & + & \Big((1+2+..+400) & - & (1+2+..+300)\Big) \\ = & \Big(\frac{200}{2}\cdot(200+1) & - & 99\cdot\frac{99+1}{2}\Big) & + & \Big(\frac{400}{2}\cdot(400+1) & - & \frac{300}{2}\cdot(300+1)\Big) \\ = & (20'100 & - & 4'950) & + & (80'200 & - & 45150) \\ = & \underline{\underline{50'200}} & & & & & & \end{array}$$

**Aufgabe 2.1:**

$$\begin{aligned} 2+4+6+\ \dots\ +444 &= 222\cdot(222+1)\\ &= \underline{\underline{49'506}} \end{aligned}$$

Beachte: Wir haben $2\cdot n = 444$ gesetzt und somit $n = 222$ verwendet.

**Aufgabe 2.2:**

$$\begin{aligned} 200+202+204+\ \dots\ +500 &= (2+4+6+\ \dots\ +500) - (2+4+6+\ \dots\ +198)\\ &= 250\cdot 251 - 99\cdot 100\\ &= 62'750 - 9900\\ &= \underline{\underline{52'850}} \end{aligned}$$

Beachte: Wir haben $2\cdot n = 500$ gesetzt und somit $n = 250$ und
wir haben $2\cdot n = 198$ gesetzt und somit $n = 99$ verwendet.

**Aufgabe 2.3:**

$$100+102+104+\ \dots\ +200+302+304+306+\ \dots\ +400 =$$

$$\begin{aligned} &= \Big((2+4+\ \dots\ +200) - (2+4+\ \dots\ +98)\Big) + \Big((2+4+\ \dots\ +400) - (2+4+\ \dots\ +300)\\ &= (100\cdot 101 - 49\cdot 50) + (200\cdot 201 - 150\cdot 151)\\ &= (10100 - 2450) + (40'200 - 22'650)\\ &= \underline{\underline{25200}} \end{aligned}$$

Beachte: Wir haben $2\cdot n =\ \dots$ gesetzt und somit $n =\ \dots$ und
wir haben $2\cdot n =\ \dots$ gesetzt und somit $n =\ \dots$ und
wir haben $2\cdot n =\ \dots$ gesetzt und somit $n =\ \dots$ und
wir haben $2\cdot n =\ \dots$ gesetzt und somit $n =\ \dots$ verwendet.

**Aufgabe 2.4:**

$$50+51+52+\ \dots\ +149+150+152+154+156+\ \dots +198+200 =$$

$$\begin{aligned} &= \Big((1+2+\ \dots\ +150) - (1+2+\ \dots\ +49)\Big) + \Big((2+4+\ \dots\ +200) - (2+4+\ \dots\ 150)\Big)\\ &= \Big(\tfrac{150}{2}\cdot(150+1) - 49\cdot\tfrac{49+1}{2}\Big) + \Big(100\cdot 101 - 75\cdot 76\Big)\\ &= \Big(11'325 - 1225\Big) + \Big(10'100 - 5700\Big)\\ &= \underline{\underline{14'500}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.1:**

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ \dots\ +333 &= 167^2 \\ &= \underline{\underline{27889}} \end{aligned}$$

Beachte: Wir haben $2 \cdot n - 1 = 333$ gesetzt und somit $n = (333+1) : 2 = 167$ verwendet.

**Aufgabe 3.2:**

$$\begin{aligned} 201+203+205+\ \dots\ +501 &= (1+3+5+\ \dots\ +501) - (1+3+5+\ \dots\ 199) \\ &= 251^2 - 100^2 \\ &= 63'001 - 10'000 \\ &= \underline{\underline{53'001}} \end{aligned}$$

Beachte: Wir haben $2 \cdot n - 1 = 501$ gesetzt und somit $n = (501+1) : 2$ und
wir haben $2 \cdot n - 1 = 199$ gesetzt und somit $n = \frac{199+1}{2}$ verwendet.

**Aufgabe 3.3:**

$$101+103+105+\ \dots\ +201+301+303+305+\ \dots\ +401 =$$

$$\begin{aligned} &= \Big((1+3+\ \dots\ +201) - (1+3+\ \dots\ +99)\Big) + \Big((1+3+\ \dots\ +401) - (1+3+\ \dots\ +299)\Big) \\ &= \Big(101^2 - 50^2\Big) + \Big(201^2 - 150^2\Big) \\ &= \Big(10201 - 2500\Big) + \Big(40'401 - 22'500\Big) \\ &= \underline{\underline{25'602}} \end{aligned}$$

Beachte: Wir haben $2 \cdot n + 1 = \ \dots$ gesetzt und somit $n = \ \dots$ und
wir haben $2 \cdot n + 1 = \ \dots$ gesetzt und somit $n = \ \dots$ und
wir haben $2 \cdot n + 1 = \ \dots$ gesetzt und somit $n = \ \dots$ und
wir haben $2 \cdot n + 1 = \ \dots$ gesetzt und somit $n = \ \dots$ verwendet.

**Aufgabe 3.4:**

$$50+51+52+\ldots+149+150+152+154+156+\ldots+198+200+201+203+205+\ldots+297+299=$$

$$\begin{aligned}
&= \Big((1+2+3\ \ldots\ +150) && - && (1+2+3\ \ldots\ 49)\Big) && && \\
& && + && \Big((2+4+6\ \ldots\ +200) && - && (2+4+6\ \ldots\ +150)\Big) \\
& && + && \Big((1+3+5\ \ldots\ +299) && - && (1+3+5\ \ldots\ +199)\Big) \\
&= \Big(\tfrac{150}{2}\cdot(150+1) && - && 49\cdot\tfrac{50}{2}\Big) && && \\
& && + && \Big((100\cdot 101) && - && (75\cdot 76)\Big) \\
& && + && \Big(150^2 && - && 100^2\Big) \\
&= 11325 && - && 1225 && && \\
& && + && 10100 && - && 5700 \\
& && + && 22500 && - && 10000 \\
&= \underline{\underline{27'000}} && && && &&
\end{aligned}$$

Die Lösungen
zu den *Kugeltürmen* und der *Summe der Zweierpotenzen (Quadratzahlen):*

15) 55 Kugeln für n = 5
91 Kugeln für n = 6.

16) 35 Kugeln für n = 5
56 Kugeln für n = 6.

17) a) $2^7 - 1 = 127$
b) $2^8 - 1 = 255$
c) $2^9 - 1 = 511$
d) $2^{11} - 1 = 2047$

18) Das Schachbrett hat $8 \cdot 8 = 64$ Felder. Im 64-sten Feld befinden sich $2^{63}$ Reiskörner. Hätte das Schachbrett noch ein Feld mehr, so wären in diesem 65-sten Feld $2^{64}$ Reiskörner. Das wäre um ein Reiskorn mehr als in allen vorhergehenden 64 Feldern. Die Gesamtzahl der Reiskörner beträgt also $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.

Das sind 18'446'744'073'709'551'615 Reiskörner.

In ganz Indien könnte man nicht so viele Reiskörner auftreiben, auch nicht wenn man China und die Schweiz dazu nimmt, auf der ganzen Welt nicht.

Ich habe nachgerechnet: 10 Gramm Reis sind etwa 500 Reiskörner. Eine Tonne Reis enthält also etwa 50'000'000 Reiskörner. Für die Schachbrettaufgabe würde man 370'000'000'000 Tonnen Reis benötigen, also 370 Milliarden Tonnen Reis.

Die Jahresproduktion an Reis auf der ganzen Welt beträgt etwa 60 Milliarden Tonnen. Für 370 Milliarden Tonnen Reis würde die Reisernte von sechs Jahren nicht einmal ausreichen.

Weitere Aufgaben mit (kurzen) Lösungen zu Aufgaben in der gleichen Art sind zu finden unter

http://dieterortner.ch/diverses_zahlenreihen.htm