Natürliche Zahlen

Algebra

Kapitel 2

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

27. März 2024

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

1 Unsere Zahlen

1.1 Die Entwicklung unserer Zahlen/Zahlensysteme.
Wie die Zahlen zu uns kamen

1.2 Nicht-dezimale Zahlensysteme

1.3 Grosse Zahlen

Inhaltsverzeichnis

2 Natürliche Zahlen **1**
2.1 Die Rechenoperationen . . . 2
2.1.1 Die Addition . . . 2
2.1.2 Die Subtraktion . . . 10
2.1.3 Die Multiplikation . . . 17
2.1.4 Die Division . . . 18
2.2 Vermischte Rechenoperationen . . . 21
2.2.1 Das Distributivgesetz . . . 22
2.3 Das Rechnen mit Potenzen . . . 26
2.4 Erste Textaufgaben . . . 29
2.5 Unsere Formeln - das Rechnen mit natürlichen Zahlen . . . 30
2.6 *Meine* Zusammenfassung: . . . 31
2.7 Definitionen . . . 32
2.7.1 alphabetisch . . . 32
2.7.2 nach der Nummerierung . . . 32

2 Natürliche Zahlen

In diesem Kapitel werden wir eine erste wichtige Zahlenmenge kennenlernen, die *Menge der natürlichen Zahlen*.
Weiter werden wir an Beispielen mit Hilfe schon bekannter Rechnentechniken die *Rechenoperationen und -gesetze* zusammenfassen und die zugehörigen Definitionen dazu verwenden, uns mit der mathematischen Schreibweise vertraut zu machen.

Als Aufgabensammlung verwenden wir

ARITHMETIK Aufgabensammlung
von der
Fachgruppe Mathematik, Kantonsschule Rychenberg
Winterthur
4. Auflage, 2017

in der üblichen Darstellung: *Aufgabenpool* **;** *Pflicht*

Wir beginnen gleich mit einer sehr wichtigen **Definition:**

Definition 2.1 (*Die Menge der natürlichen Zahlen*)

Die **Menge der natürlichen Zahlen** *ist eine Zusammenfassung der Zahlen 1, 2, 3, ... zu einem Ganzen.*

Schreibweise:

- $\mathbb{N} =$
- $\mathbb{N}_0 =$
- $\mathbb{N}_g =$
-

2.1 Die Rechenoperationen

2.1.1 Die Addition

Beispiel 2.1

-
-
-

Notationen: $a + b = c$

Aufgaben 2.1 *Bestimme in Deinen Beispielen die* Summanden, Summe *und die* ausgerechnete Summe*.*

An folgendem Beispiel wollen wir uns mit einem ersten *Gesetz für Rechenoperationen* vertraut machen:

Beispiel 2.2 Rechne *geschickt*:

$$280 + 317 + 138 + 83 + 12 =$$

$\Rightarrow$ Wir dürfen

d.h.: die Addition ist

es gilt somit das

und wir definieren:

Definition 2.2 (*Die Kommutativität*)

Eine Verknpfung $*$ heisst **kommutativ)** $:\Leftrightarrow$
$a * b = b * a$, *für alle zulässigen Elemente a, b.*

Definition 2.3 (*Die Assoziativität*)

Eine Verknpfung $*$ heisst **assoziativ)** $:\Leftrightarrow$
$a * b * c = a * (b * c)$, *für alle zulässigen Elemente a, b, c.*

Aufgaben: p.1 / 7, 11 - 16; 7, 11, 15

Noch zwei Aufgaben zur *schriftlichen Addition:*

Aufgaben 2.2 *Addiere:*

$$\begin{array}{r} 1\,2\,5\,6\,7\,9 \\ 2\,3\,2 \\ 1\,2\,4\,0\,8 \\ 9\,0\,0\,9\,7 \\ 2\,1\,4\,6\,0\,0\,7\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,4\,6\,7\,1\,5\,7\,3 \\ 1\,2\,3 \\ 2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,6\,7 \\ 4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \hline \end{array}$$

Aufgaben 2.3 *Ersetze die $*$ durch geeignete Ziffern:*

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & * & * & 7 \\ + & 2 & 1 & 8 & 9 \\ \hline & * & 0 & 7 & * \end{array}$$

Mit geschickten Umformungen lassen sich auch die folgenden etwas umfangreicheren Summen einfach berechnen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Berechne selber:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20$$

Wir können die obigen Umformungen zu einer Formel zusammenfassen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

Aufgaben 2.4 *Berechne die folgenden Summen:*

- $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 =$

- $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000 =$

Beispiel 2.3 Wir wollen in diesem Beispiel

die *Summe aller geraden Zahlen*

untersuchen:

Auch zu dieser Aufgabenstellung gibt es eine Formel:

Die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis zu einer beliebigen geraden Zahl $2n$*, wobei* n *eine natürliche Zahl ist, lautet:*

$$\text{Summe } = n \cdot (n+1)$$

Bestimme in den folgenden Aufgaben die Summe zuerst

- durch geschicktes Umformen und Zusammenfassen
  und anschliessend
- mit Hilfe der Formel:

1. Die Summe von (und mit) 2 bis (und mit) 12:

2. Die Summe von 2 bis 40:

Bestimme nun noch die Summe aller geraden Zahlen von 42 bis 1000.

Aufgaben 2.5 *Berechne weiter die folgenden Summen:*

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + 200 =$

2. $50 + 51 + 52 + \ldots + 100 =$

3. $2 + 4 + 6 + \ldots + 50 =$

4. $2 + 4 + 6 + \ldots + 100 =$

5. $100 + 102 + 104 + \ldots + 200 =$

6. $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 =$

7. $22 + 23 + 24 + \ldots + 30 + 52 + 54 + 56 + \ldots + 100 =$

8. $2 + 4 + 6 + \ldots + 98 + 100 + 101 + 103 + 105 + \ldots 197 + 199 + 201 + 202 + 203 + \ldots + 299 + 300 =$

Aufgaben 2.6 *Formuliere eine eigene Aufgabe im obigen Stil und lasse sie von einem Mitschüler/ einer Mitschülerin lösen.*

Aufgaben 2.7 *Untersuche die folgende Rechnung:*

$$\begin{array}{lcccl} 1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\ 1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\ 1+3+5+7 & = & 16 & = & \ldots \end{array}$$

- *Formuliere in eigenen Worten eine Regel,*
- *stelle sie mathematisch dar*
- *und prüfe, ob die Regel auch an weiteren Beispielen angewendet werden darf.*

Berechne nun ...

1. Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 50:

2. Die Summe aller ungeraden Zahlen von 51 bis 99:

3. Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 100:

4. Die Summe aller geraden Zahlen von 1 bis 100:

5. Die Summe aller Zahlen von 1 bis 100:

Aufgaben: p.15 / 211 - 218;

2.1.2 Die Subtraktion

Beispiel 2.4

-
-
-

<u>Notationen</u>: $a - b = c$

Aufgaben 2.8

- *Bestimme in Deinem Beispiel den* Minuend, Subtrahend *und die* ausgerechnete Differenzen.
- *Untersuche, ob die Subtraktion kommutativ ist.*
- *Untersuche, ob die Subtraktion assoziativ ist.*

Ganz wichtig ist,
dass ein Gesetz immer für *alle* zulässigen Elemente gelten muss.
Das hat zur Folge, dass auch wenn eine Gesetzmässigkeit in vielen, in wirklich sehr vielen Beispielen erfüllt wird, ein Gegenbeispiel genügt um sagen zu können, dass das Gesetz nicht gilt.

Beispiel 2.5 Hilfe der folgenden Beispiele wollen wir uns mit den Begriffen in der Addition und der Subtraktion etwas vertraut machen und dabei *Variablen* für die gesuchten Grössen einführen:

1. Die Differenz aus 12 und 3 und die Differenz aus 13 und 2 sind die Summanden einer Summe.
   Berechne die ausgerechnete Summe.

2. Die Summe aus 1 und 11 und die Differenz aus 22 und 2 bilden eine Summe.
   Berechne die ausgerechnete Summe.

3. Die Differenz aus 10 und 5 und die Summe aus 10 und 5 sind zwei Summanden einer Summe, die ausgerechnet 33 ergibt.
   Berechne den dritten Summanden.

4. Die Differenz aus 45 und 22 ist der Subtrahend in einer Differenz, wo der Minuend die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20 ist.
   Berechne die ausgerechnete Differenz.

5. Die Summe aller ungeraden Zahlen von 10 bis 20 ist der Subtrahend einer Differenz, die ausgerechnet 1 ergibt.
   Berechne den zugehörigen Minuenden.

6. Die ausgerechnete Summe beträgt 103, wobei der erste Summand die Differenz von 88 und 44 ist und der zweite Summand die Summe aller Quadratzahlen von 1 bis 20 ist.
   Suche zuerst im Internet eine Formel zur Berechnung *der Summe von Quadratzahlen* und berechne anschliessenden den fehlenden Summanden.

7. Berechne die Differenz aus der Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 100 und der Summe aller geraden Zahlen von 1 bis 50.

Aufgaben: p.2 / 17-22 , p.15 / 211 - 216

Beispiel 2.6 Auf einem Bauernhofe leben Hühner und Kaninchen. Wie viele Beine gibt es auf dem Bauernhof,

1. wenn 21 Hühner und 3 Kaninchen dort leben?

2. wenn a Hühner und b Kaninchen dort leben?

Beispiel 2.7 Wie viele Hühner und Kaninchen leben auf dem Bauernhof,

1. wenn es 2 Köpfe und 6 Beine hat:

2. wenn es 1 Kopf und 2 Beine hat:

3. wenn es 24 Köpfe und 72 Beine hat:

4. wenn es 18 Köpfe und 42 Beine hat:

5. wenn es a Köpfe und b Beine hat:

6. wenn es 243 Köpfe und 518 Beine hat:

An folgenden Beispielen wollen wir uns mit den *Klammerregeln* vertraut machen:

Beispiel 2.8 Rechne *geschickt*:

$$327 - 38 - 52 =$$

$$513 - 22 - 33 - 45 =$$

⇒ Wir dürfen

müssen aber, wenn die Klammer nach einem ≪ - ≫ *gesetzt wird*,

Beispiel 2.9 Rechne *geschickt*:

$$827 - (327 + 475) =$$

$$123 - (23 + 88) + 546 - (187 + 146)$$

⇒ Wir dürfen

müssen aber, wenn die Klammer nach einem ≪ - ≫ *steht und geöffnet wird*, Wir fassen die **Klammerregeln** zusammen:

-
-
-
-
-
-

Zwei Beispiele zur *schriftlichen Subtraktion:*

Aufgaben 2.9 *Subtrahiere:*

4 5 1 2 5 6 7 9	3 4 6 7 1 5 7 3
5 6 2 3 2	1 2 3 4
1 2 4 0 8	2 3 4 5 6
6 7 9 0 0 9 7	3 4 5 6 7 8
6 0 0 7 9	4 5 6 7 8 9 0

Aufgaben 2.10 *Ersetze die $*$ durch geeignete Ziffern:*

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & * & * & 7 \\ - & 2 & 1 & 8 & 9 \\ \hline & * & 0 & 7 & * \end{array}$$

und als eine kleine Repetition:

Aufgaben 2.11 *Addiere im 5er-System:*

$$\begin{array}{r} 2\,4\,3 \\ 1\,1\,3\,2 \\ 1\,2\,4\,0\,4 \\ 3\,0\,0\,1 \\ 3\,2\,1\,0\,1 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\,4\,0\,2\,3\,1 \\ 1\,2\,3 \\ 2\,3\,0\,1 \\ 3\,0\,1\,2\,3 \\ 1\,1\,2\,2\,3\,3 \\ \hline \end{array}$$

Vorgehensweise: (in eigenen Worten)

Aufgaben 2.12 Subtrahiere im 7er-System:

$$\begin{array}{r} 6\,5\,4\,3\,2\,1\,0 \\ 1\,1\,3\,2 \\ 6\,6 \\ 3\,0\,0\,1 \\ 3\,2\,1\,5\,0\,1 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\,6\,4\,0\,2\,3\,1 \\ 1\,2\,3 \\ 2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,6\,0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Vorgehensweise: (in eigenen Worten)

2.1.3 Die Multiplikation

Beispiel 2.10

-
-
-

Notationen: $a \cdot b = c$

Aufgaben 2.13

- *Bestimme in Deinem Beispiel die* Faktoren *und das* (ausgerechnete) Produkt.
- *Untersuche die Multiplikation auf Kommutativität.*
- *Untersuche die Multiplikation auf Assoziativität.*

Aufgaben 2.14 *Zwei Aufgaben* zur schriftlichen Multiplikation:

$1234 \cdot 567$ $\qquad$ $3463 \cdot 32478$

2.1.4 Die Division

Beispiel 2.11

-
-
-

Notationen: $a : b = c$

Aufgaben 2.15

- *Bestimme in Deinem Beispiel den* Divisior, Dividenden *und den* (ausgerechneten) Quotienten.
- *Untersuche, ob die Division kommutativ ist.*
- *Untersuche, ob die Division assoziativ ist.*

Aufgaben 2.16 *Zwei Aufgaben* zur schriftlichen Division:

37250 : 125   22770 : 88

Mit den folgenden Beispielen wollen wir die Klammerregeln bei Punktoperationen untersuchen:

Beispiel 2.12 Setze Klammern, so dass wahre Aussagen entstehen:

1. $3600 : 180 : 10 \cdot 2 = 400$

2. $3600 : 180 : 10 \cdot 2 = 4$

3. $3600 : 180 : 10 \cdot 2 = 100$

4. $3600 : 180 \cdot 10 \cdot 2 = 4$

und fasse die folgenden **Klammerregeln** zusammen:

- $a : (b \cdot c) =$

- $a : (b : c) =$

- $a \cdot (b \cdot c) =$

- $a \cdot (b : c) =$

Aufgaben 2.17 *Erstelle zu jedem der obigen Fälle ein Zahlenbeispiel:*

Aufgaben 2.18 *Beantworte die folgenden Fragen und ergänze mit einem zugehörigen Zahlenbeispiel:*

1. *Bei einer Multiplikation ist ein Faktor gleich 0. Wie gross ist das ausgerechnete Produkt?*

2. *Bei einer Division ist der Dividend gleich 0. Wie gross ist der ausgerechnete Quotient?*

3. *Bei einer Division ist der Divisor gleich 0. Wie gross ist der ausgerechnete Quotient?*

4. *Wie gross ist der ausgerechnete Quotient, wenn der Divisor gleich dem Dividenden ist?*

5. *Wie verändert sich der ausgerechnete Quotient, wenn der Divisor verdoppelt wird?*

6. *Wie verändert sich der ausgerechnete Quotient, wenn der Dividend halbiert wird?*

7. *Wie verändert sich das ausgerechnete Produkt, wenn zwei Faktoren verdoppelt werden?*

8. *Wie verändert sich das ausgerechnete Produkt, wenn ein Faktor verdreifacht und ein anderer gedrittelt wird?*

Aufgaben: Kap 1.3 / 63 - 68; 64, 65, 68

2.2 Vermischte Rechenoperationen

Aufgaben 2.19 *Repetiere ...*

- *Summe & Summand und die zugehörige Verknüpfung:*
- *Differenz, Minuend & Subtrahend und die zugehörige Verknüpfung:*
- *Produkt & Faktor und die zugehörige Verknüpfung:*
- *Quotient, Dividend & Divisor und die zugehörige Verknüpfung:*

Bestimme in der folgenden Rechnung die *Summanden, Minuenden, ...*

$$1 + 2 \cdot 3^4 : 9 - 5 \cdot (18 : 3 - 4) + 27 : 3 \cdot 9$$

und das Resultat:

Wir wollen die folgenden Regeln für das Rechnen mit vermischten Verknüpfungen/ Operationen festhalten:

-
-
-
-

2.2.1 Das Distributivgesetz

Im Folgenden werden wir die Reihenfolge unserer Untersuchung umkehren:
Wir werden nicht ausgehend von Beispielen auf die Gesetzmässigkeiten schliessen, sondern die Gesetze definieren und anschliessend zugehörige Beispiele zur Veranschaulichung formulieren:

Definition 2.4 (*Die Distributivgesetze*)

Das **Distributivgesetz** *erklärt das gemischte Rechnen mit Punkt- und Strichoperationen und wird durch folgende Gleichungen definiert:*

$$\begin{array}{rcl} (a+b)\cdot c & = & a\cdot c + b\cdot c \\ (a-b)\cdot c & = & a\cdot c - b\cdot c \\ (a+b):c & = & a:c+b:c \\ (a-b):c & = & a:c-b:c \end{array}$$

Aufgaben 2.20 *Schreibe* ohne *Klammern:*

1. $(5+x)\cdot 3 =$
2. $(2-b+3)\cdot b^2 =$
3. $5\cdot(5+3d) =$
4. $4e^2\cdot(2e-3e^2+4e^3) =$
5. $(2a+16b):2 =$
6. $(4b^2+16ab-64b^4):2b =$

Aufgaben 2.21 *Schreibe* mit *Klammern:*

1. $(5\cdot x+9\cdot x) =$
2. $(44x^2-22y) =$
3. $(12abc-16bc+20c) =$
4. $(21q^3+49q^4-14q^2+7q^2) =$

Das Distributivgesetz ist sehr geeignet für *geschicktes Rechnen*, was wir an den folgenden Beispielen besprechen wollen:

Beispiel 2.13 Rechne geschickt:

1. $(250 + 125) : 25 =$

2. $(440 - 88) : 22 =$

3. $13 \cdot 16 + 13 \cdot 14 =$

4. $12 \cdot 21 - 11 \cdot 12 =$

5. $(48 \cdot 18 - 16 \cdot 32) : 16 =$

6. $(64 \cdot 32 + 16 \cdot 48) : 8 =$

7. $(147 \cdot 36 - 12 \cdot 49) : (49 \cdot 6) =$

8. $(99 \cdot 12 + 297 \cdot 72 - 108 \cdot 165) : (33 \cdot 12) =$

9. $966 \cdot 385 - 421 \cdot 385 + 668 \cdot 404 - 123 \cdot 404 - 545 \cdot 789 =$

10. $(33 \cdot 49) : (7 \cdot 11) =$

11. $(121 \cdot 55 \cdot 220) : (5 \cdot 11) =$

12. $(55 + 220 + 275) : (5 + 11) =$

Aufgaben: p.10 / 121 - 131 ; 121a),d) , 129a),d) , 131a),e)
p.4 / 49 - 62, 71 - 76 ;
p.11 / 133 - 154

Einige Musterlösungen zum *Geschickten Rechnen*

2.3 Das Rechnen mit Potenzen

Da wir uns schon einen kleinen Einblick in das *Rechnen mit Potenzen* erarbeitet haben, beginnen wir mit einer weiteren *Repetition*:

Aufgaben 2.22 *Definiere und erkläre die folgenden Begriffe und Regeln:*

- n-te Potenz von a
- *Regel für die Multiplikation von Zehnerpotenzen:*
- *Abkürzungen für grosse Zahlen und ihre Darstellung in Zehnerpotenzen:*

Wir werden im Folgenden die *Potenzgesetze* defineren und durch dazugehörige Beispiele erklären:

1. Potenzgesetz: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

d.h.: für das Produkt zweier Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten addiert und die Basis bleibt erhalten.

Beispiele:

-
-

Aufgaben 2.23 *Bearbeite selbständig:*

2. Potenzgesetz: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

d.h.: für das Produkt zweier Potenzen mit gleichem Exponenten werden die Basen multipliziert und bleibt der Exponent erhalten.

Beispiele:
- ∘
- ∘

3. Potenzgesetz: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

d.h.: für die Potenz einer Potenz werden die Exponenten multipliziert und bleibt die Basis erhalten.

Beispiele:
- ∘
- ∘

Bem.: Wegen der Kommutativität der Multiplikation gilt:

$$(a^m)^n = (a^n)^m$$

- **Beachte:** $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

d.h.: wir dürfen *nicht* summandenweise potenzieren..

Beispiele:
- ∘
- ∘

Aufgaben: p.12 / 159 - 174 ; 160a)-d), 163a)-d), 164, 169, 173b)d)

Letzte Beispiele:

Beispiel 2.14 Schreibe das Resultat mit Hilfe von Zehnerpotenzen und bestimme bei jeder Umformung die angewendete Gesetzmässigkeit:

1. $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4 =$

2. $(4 \cdot 10^5)^3 =$

3. $4 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^8 \cdot 20 =$

4. $(7^2 \cdot 12 + 21^2 \cdot 33 - 196 \cdot 3) : 49 - 27 =$

5. $(50 \cdot 10^7 + 400 \cdot 10^6 - 10^8) : 10^8 =$

Aufgaben: p.12 / 187 - 194 ; 188, 190, 192, 194

2.4 Erste Textaufgaben

Wir wollen uns mit einigen Aufgaben befassen und eine geschickte Herangehensweise gemeinsam erarbeiten ...

Aufgaben: p.14 / 203 - 237 ;

2.5 Unsere Formeln - das Rechnen mit natürlichen Zahlen

Das Rechnen mit natürlichen Zahlen

unsere Formeln ...

erklärt, angewendet & eingübt
und ergänzt mit
mit der Herleitung weiterer Formeln

eine Lernaufgabe,
eine Prüfungsvorbereitung

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

29. Oktober 2023

2.6 *Meine* Zusammenfassung:

2.7 Definitionen

2.7.1 alphabetisch

Der Begriff	im Kapitel	auf Seite
Die Assoziativität	2.1.1 *Die Addition*	3
Die Distributivgesetze	2.2.1 *Das Distributivgesetz*	22
Die Kommuntativität	2.1.1 *Die Addition*	3
Die Menge der natürlichen Zahlen	2 *Natürliche Zahlen*	1

2.7.2 nach der Nummerierung

Nummerierung	**Der Begriff**	auf Seite
2.1	**Die Menge der natürlichen Zahlen**	1
2.2	**Die Kommutativität**	3
2.3	**Die Assoziativität**	3
2.4	**Die Distributivgesetze**	22