Mengenlehre

Algebra

Kapitel 3

(mit nummerischen Resultaten)

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

22. Februar 2024

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

3 Mengenlehre

3.1 Übersicht

Wir werden in diesem Kapitel einen sehr wichtigen und immer wieder vorkommenden Begriff der Mathematik kennenlernen

Wir werden dieses Kapitel auch dazu verwenden, *mathematische Schreibweisen* einzuführen, zu verwenden und auch in der Sprechweise einzuüben. Das Verfassen von *Zusammenfassungen* wird uns beschäftigen, wobei wir insbesondere auch unsere bisherigen Erfahrungen einfliessen lassen.
Ausführlich werden wir die *Darstellungsformen*, die *Teilmengen* und das *Rechnen mit Mengen* besprechen.

Der Begriff der Menge existiert auch im täglichen Leben ...

Beispiel 3.1

- Die Menge aller SchülerInnen der Klasse U1d
- ...
- ...
- ...
- ...

... nur ist nicht jede dieser Mengen auch eine Menge, welche wir in der Mathematik verwenden können.

Was wir im ersten Abschnitt also machen müssen und werden ist, den Begriff der *Menge im mathematischen Sinne* zu **definieren**:

Definition 3.1 (*einen Begriff definieren*)

Einen Begriff **definieren** *heisst ihn ein(ein)deutig, unmissverständlich und zweifelsfrei festzulegen.*

Im anschliessenden Abschnitt werden wir uns mit den *Darstellungsformen* beschäftigen. Wir werden lernen, Mengen graphisch und in der (mathematisch) beschreibenden Form darzustellen und insbesondere auch die beschreibende Form richtig zu lesen.

Im Abschnitt *Teilmengen* werden wir besprechen wie Mengen zueinander stehen können.

Im letzten Abschnitt werden wir *mit Mengen rechnen* und sehen, wie sich dieses Rechnen auch graphisch darstellen lässt.

Für die begleitenden Aufgaben verwenden wir u.a. die Sammlung

ARITHMETIK
Zahlen, Variablen, Terme, Gleichungen

4. Auflage, der Kantonsschule Rychenberg.

in der üblichen Darstellung, mit : *Aufgabenpool* **;** *Pflicht*

Ergänzend werden wir eine kleine Online-Aufgabesammlung der Uni Stuttgart verwenden, insbesondere die Unterlagen aus

dem Schülerzirkel Mengenlehre

und natürlich eigene Aufgabenserien

3.2 Die Menge im mathematischen Sinne

Wir beginnen mit einigen Beispielen:

Beispiel 3.2 Einige mathematische (Zahlen-) Mengen, welche du evtl. schon kennengelernt hast:

- $\mathbb{N}$
- ...
- ...
- ...
- ...
- ...

Die Eigenschaften, welche die obigen Mengen als eine *Menge im mathematischen Sinne* auszeichnen sind,

- dass alle Objekte voneinander unterscheidbar sind
(sogenannt *wohlunterscheidbar* sind)

  und

- dass die Zugehörigkeit aller Objekte zu einer Menge *eindeutig bestimmt* ist

Die folgenden drei Beispiele wollen wir auf diese Eigenschaften hin untersuchen:

Beispiel 3.3 Untersuche

1. die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen
   - auf die Zugehörigkeit ihrer Objekte
   - auf die Wohlunterscheidbarkeit ihrer Objekte

2. die Menge aller netter Menschen
   - auf die Zugehörigkeit ihrer Objekte
   - auf die Wohlunterscheidbarkeit ihrer Objekte

3. die Menge allen Wassers in einer Kanne
   - auf die Zugehörigkeit ihrer Objekte
   - auf die Wohlunterscheidbarkeit ihrer Objekte

Aufgaben 3.1 *Untersuche unsere Beispiele aus* **Beispiel 3.1** *auf die angegebenen Eigenschaften und bestimme welche* Mengen im mathematischen Sinne *sind.*

Wir wollen die (mathematische) Menge nun noch definieren:

Definition 3.2 (*Die Menge (im mathematischen Sinn)*)

Die **Menge (im mathematischen Sinn)** *ist eine Zusamenfassung eindeutig bestimmter und wohlunterscheidbarer Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.*
(G. Cantor, 1845 - 1918)

Einige Bemerkungen :

- *eindeutig bestimmt* bedeutet ...

- *wohlunterscheidbar* bedeutet ...

- Die Objekte einer Menge heissen ...

- *Schreibweisen:*
  - Grossbuchstaben mit Doppelbalken

  - Geschweifte Klammern, hier in der aufzählenden Darstellung

3.2.1 Meine Zusammenfassung zu Kapitel 3.2

Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 1*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.1* / 1, 2, 7, 8 **;** 1, 7

3.2.2 Zusammenfassungen - *ein Erfahrungsaustausch*

Ihr habt (oder solltet) bei mir schon einige Zusammenfassungen geschrieben haben. Wir wollen hier eure Erfahrungen mit dem Schreiben von Zusammenfassungen zusammentragen und besprechen:

Aufgaben 3.2 *Zur Vorbereitung die folgenden Aufträge:*

- *Auf was gilt es bei einer Zusammenfassung zu achten:*

- *Was gilt es bei einer Zusammenfassung zu vermeiden:*

3.3 Darstellungsformen von Mengen

Um eine (mathematische) Menge darzustellen verwenden wir drei verschiedene Formen, die

- *aufzählende Form*,
- *die (mathematisch) beschreibende Form*,
- *Mengendiagramme*.

An den folgenden Beispielen werden wir diese Darstellungsformen besprechen:

Beispiel 3.4 Die Menge aller Teiler von 12

$$= \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$= \{x \mid x \textit{ ist ein Teiler von } 12\}$$

... und als Mengendiagramm:

Beispiel 3.5 Die Menge aller Vielfachen von 7

$$= \{ \qquad \}$$

$$=$$

. . . und als Mengendiagramm:

Die *Menge aller Teiler* und die *Menge aller Vielfachen* werden in unseren Beispielen und Aufgaben immer wieder vorkommen. Wir werden daher eine spezielle Schreibweise für diese Mengen einführen:

- $\mathbb{T}_4 =$

- $\mathbb{T}_{25} =$

- . . .

  Allgemein gilt:

- $\mathbb{V}_4 =$

- $\mathbb{V}_{25} =$

- . . .

  Allgemein gilt:

Die folgenden Beispiele und Aufgaben wollen wir auch als *Sprechübung* verwendend, d.h. vor der Lösung wollen wir auch die Aufabenstellung vorlesen:

Beispiel 3.6 Sei $\mathbb{G} := \{10, 11, 12, 13, \ldots 19, 20\}$.
Bestimme die folgenden Mengen in der aufzählenden Form:

1. $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{G} \mid x < 12\} = \{10, 11\}$

2. $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{G} \mid x \geq 15\} = \{15, 16, \ \ldots \ , 20\}$

3. $\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{G} \mid x > 20\} = \{\ \}$

4. $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{G} \mid x < 9\} = \{\ \}$

5. $\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{G} \mid x > 15 \text{ und } x < 14\} = \{\ \}$

6. $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{G} \mid x > 15 \text{ oder } x < 14\} = \{10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Beispiel 3.7 Sei $\mathbb{G} := \mathbb{N}$.
Stelle die folgenden Mengen in der (mathematisch) beschreibenden Form dar:

1. $\mathbb{H} = \{1, 2, 3, 4\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$

2. $\mathbb{I} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{x \in \mathbb{V}_3 \mid x > 2\} = \mathbb{V}_3$

3. $\mathbb{J} = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^t \wedge t \in \mathbb{N}_0\}$

4. $\mathbb{K} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = \mathbb{N}_g = \mathbb{V}_2$

5. $\mathbb{L} = \{20, 21, 22, \ldots 39, 40\} = \{r \in \mathbb{N} \mid 20 \leq r < 41\}$

6. $\mathbb{M} = \{8, 15, 22, 29, \ldots\} = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 8 + 7 \cdot v \wedge v \in \mathbb{N}_0\}$

7. $\mathbb{O} = \{4, 1, 3, 2\} = \mathbb{N}_{\leq 4}\}$

Aufgaben 3.3 *Sei* $\mathbb{G} := \mathbb{N}$.
Stelle auch die folgenden Mengen in der aufzählenden Form dar:

1. $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2^4\} = \{16\}$

2. $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2^4 \text{ oder } x = 2^6\} = \{16, 64\}$

3. $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2^4 \text{ und } x = 2^6\} = \{\ \}$

4. $\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2^n\}$ $\lightning$

5. $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2^n \text{ und } n \in \mathbb{N}\} = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\} = \{2, 4, 8, 16, \ \ldots\}$

6. $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2^n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, \ \ldots\}$

7. $\mathbb{I} = \{r \in \mathbb{G} \mid r = 2^n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, \ \ldots\}$

8. $\mathbb{L} = \{t \in \mathbb{N}_u \mid t = 2^n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\} = \{\ \}$

9. $\mathbb{M} = \{u \in \mathbb{G} \mid u = 2^n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}_g\} = \{2^2, 2^4, 2^6, 2^8, \ldots\} = \{4, 16, 64 \ \ldots\}$

10. $\mathbb{O} = \{x \in \mathbb{V}_3 \mid x = 2^n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\} = \{\ \}$

11. $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 3^m \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\}$ $\lightning$

12. $\mathbb{T} = \{y \in \mathbb{G} \mid x = 2^m \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4, \ \ldots\}$

13. $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 3{\cdot}n{+}6 \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \{3 \cdot 1 + 6, \ 3 \cdot 2 + 6, \ 3 \cdot 3 + 6, ...\} = \{9, 12, 15, \ \ldots\}$

14. $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 4 \cdot p + 5 \ , \ p \in \mathbb{N}\} = \{9, 13, 17, \ \ldots\}$

15. $\mathbb{W} = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x = 3 \cdot n + 6 \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \{12, 18, 24, \ \ldots\}$

16. $Willi = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 2 \cdot n - 6 \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \ \ldots\}$

Beispiel 3.8 Sei $\mathbb{G} := \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$.
Stelle die folgenden Mengen in *einem* Mengendiagramm bezüglich der Grundmenge $\mathbb{G}$ dar:

1. $\mathbb{O} = \{x \in \mathbb{G} \mid x \text{ ist ein Vielfaches von } 33\ \}$
2. $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{G} \mid x < 30\}$
3. $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{G} \mid x > 3 \cdot 21\}$
4. $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{G} \mid x \in \mathbb{T}_{88}\}$
5. $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{G} \mid x = 8^2\}$

Aufgaben 3.4 *Sei* $\mathbb{G} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots 49, 50\}$.
Bestimme die folgenden Mengen in der aufzählenden Form:

1. $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{G} \mid 3x < 21\} = \{0, 1, 2,\ \ldots\ , 6\}$
2. $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{G} \mid x + 17 > 60\} = \{44, 45, 46,\ \ldots\ , 50\}$
3. $\mathbb{W} = \{x \in \mathbb{G} \mid x - 17 > 60\} = \{\ \}$
4. $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{G} \mid 3x = 4x\} = \{0\}$
5. $\mathbb{Y} = \{x \in \mathbb{G} \mid 5 \cdot x = x \cdot 5\} = \{0, 1, 2,\ \ldots, 50\}$

… und gib an, welche der folgenden Aussagen wahr *sind:*

6. $5 \in \mathbb{U}$ $\surd$	7. $5 \in \mathbb{V}$	8. $50 \notin \mathbb{Y}$
9. $1 \notin \mathbb{V}$ $\surd$	10. $80 \in \mathbb{X}$	11. $99 \in \mathbb{W}$

Weitere Aufgaben zum Üben der Sprechweise von Mengen in der *mathematisch beschreibenden Form* und deren Darstellung in der *aufzählenden Form* ...

Aufgaben 3.5 *Stelle die folgenden Mengen in aufzählender Form dar:*

1. $\{x \mid x \text{ ist ein Teiler von 33}\} = \{1, 3, 11, 33\}$
2. $\{x \mid x \text{ ist ein Vielfaches von 21}\} = \{21, 42, 63\ \ldots\}$
3. $\{c \mid c \text{ ist ein Vielfaches von 21}\} = \{21, 42, 63,\ \ldots\}$
4. $\{x \mid x < 4\}$ $\lightning$
5. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{1, 2, 3\}$
6. $\{r \in \mathbb{N}_g \mid r < 4\} = \{2\}$
7. $\{x \in \mathbb{N} \mid -5.3 < x \leq 3.5\} = \{1, 2, 3\}$
8. $\{w \in \mathbb{V}_4 \mid -5.3 < w \leq 3.5\} = \{\ \}$
9. $\{w \in \mathbb{T}_4 \mid -5.3 < w \leq 3.5\} = \{1, 2\}$
10. $\{x \in \mathbb{V}_6 \mid x \in \mathbb{T}_{54}\} = \{6, 18, 54\}$
11. $\{q \in \mathbb{N} \mid x \cdot q < 25\}$ $\lightning$
12. $\{q \in \mathbb{N} \mid x \cdot q < 25 \text{ und } x \in \mathbb{T}_4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
13. $\{t \in \mathbb{N} \mid x^t \geq 25 \text{ und } x \in \mathbb{T}_4\} = \{\ \}$
14. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^t \geq 25 \text{ und } t \in \mathbb{T}_4\} = \{25, 26, 27,\ \ldots\}$
15. $\{t \in \mathbb{T}_{12} \mid x^t \geq 250 \text{ und } x \in \mathbb{N}_{\geq 8}\} = \{3, 4, 6, 12\}$
16. $\{s \in \mathbb{N} \mid 2^s - 1 \leq 15\} = \{1, 2, 3, 4\}$
17. $\{b \in \mathbb{N} \mid b = r^2 \text{ und } r \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 4, 9,\ \ldots\}$
18. $\{f \in \mathbb{N} \mid 20 > 5f\} = \{1, 2, 3\}$
19. $\{j \in \mathbb{T}_{12} \mid 20 > 5j\} = \{1, 2, 3\}$
20. $\{p \in \mathbb{V}_{12} \mid 20 < j\} = \{12, 24, 36,\ \ldots\}$

und umgekehrt ...:

Aufgaben 3.6 *Stelle die folgenden Mengen in einer* mathematisch beschreibenden Form *dar:*

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}$

2. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \mathbb{N}_u$

3. $\{17, 18, 19, 20, 21\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 16 < x < 22\}$

4. $\{\ldots, 17, 18, 19, \ldots\}$ ↯

5. $\{4, 8, 12, 16, \ldots\} = \{c \in \mathbb{V}_4 \mid c > 1\} = \mathbb{V}_4$

6. $\{64, 68, 72, 76, 80, \ldots\} = \{y \in \mathbb{V}_4 \mid y \geq 64\}$

7. $\{333, 336, 339, 342, \ldots 660, 663, 666\} = \{t \in \mathbb{V}_3 \mid 333 \leq t \leq 666\}$

8. $\{1, 2, 3, 6\} = \mathbb{T}_6$

9. $\{117, 130, 143, \ldots\} = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 117 + t \cdot 13 \wedge t \in \mathbb{N}_0\}$

10. $\{3, 17, 31, 45, 59, \ldots\} = \{c \in \mathbb{N} \mid c = 3 + s \cdot 14 \wedge s \in \mathbb{N}_0\}$

11. $\{10, 17, 24, 31, \ldots\} = \{d \in \mathbb{N} \mid d = 3 + v \cdot 7 \wedge v \in \mathbb{N}\}$

12. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \textit{ ist prim}\}$

13. $\{\frac{5}{13}, \frac{5}{14}, \frac{5}{15}, \frac{5}{16}, \ldots\} = \{w \in \mathbb{Q} \mid w = \frac{5}{v} \wedge v \in \mathbb{N}_{\geq 13}\}$

14. $\{\frac{4}{12}, \frac{4}{13}, \frac{4}{14}, \frac{4}{15}, \ldots\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{4}{s} \wedge s \in \mathbb{N}_{\geq 12}\}$

15. $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\} = \{a \in \mathbb{Q} \mid a = \frac{b}{b+1} \wedge b \in \mathbb{N}\}$

16. $\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \ldots\} = \{w \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{y^2}{y^2+1} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

Aufgaben 3.7 *Bestimme je drei eigene Beispiele*

- *für die Darstellung von Mengen*
  in der aufzählenden Form:

- *für die Darstellung von Mengen*
  in der mathematisch beschreibenden Form:

Aufgaben 3.8 *Diskutiere deine Aufgaben mit dem Banknachbarn/ der Banknachbarin.*

3.3.1 Meine Zusammenfassung zu Kapitel 3.3

Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 2*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.1* / 3 - 6 , *Kapitel 3.2* / 47 - 52

3.4 Teilmengen

Definition 3.3 (*Die Teilmenge*)

Eine Menge $\mathbb{A}$ heisst eine **Teilmenge** *der Menge $\mathbb{B}$, genau dann wenn jedes Element von $\mathbb{A}$ auch ein Element von $\mathbb{B}$ ist.*

Bem.:

- *Schreibweise:*
- *Sprechweise:*
- **Obermenge:**

Beispiel 3.9

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{V}_2 \ \ldots \ \mathbb{V}_4$
- $\mathbb{T}_6 \ \ldots \ \mathbb{T}_{12}$
-
-

Aufgaben 3.9 *Sei $\mathbb{A} := \{a, b, c\}$.*
Bestimme alle Teilmengen von $\mathbb{A}$.

Abschliessend noch einige Bemerkungen:

3.4.1 Meine Zusammenfassung zu Kapitel 3.4

Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 3*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.1* / 9 - 12 **;** 9, 10

3.5 Das Rechnen mit Mengen

Ähnlich zu den bekannten Rechenoperationen ..., ..., ... und ..., welche uns das Rechnen mit Zahlen ermöglichen, existieren *Mengenverknüpfungen*, welche uns das Rechnen mit Mengen ermöglichen:

-
-
-

Wir betrachten zur Einführung die folgenden Mengen

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 4, 8, 9\} \text{ und } \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

und wollen mit Hilfe der Darstellung durch ein Mengendiagramm die Mengenverknüpfungen besprechen:

Wir stellen fest, dass es Elemente gibt,

- welche zu $\mathbb{A}$, aber nicht zu $\mathbb{B}$ gehören: ...

  diese bilden die sogenannte ....

  Schreibweise: ...... *Sprechweise:* ....

Immer noch mit dem gleichen Beispiel wollen wir die folgenden weiteren Untersuchungen durchführen:

Es gibt Elemente,

- welche zu $\mathbb{B}$, aber nicht zu $\mathbb{A}$ gehören: ...

  diese bilden die sogenannte ....

  Schreibweise: ...... *Sprechweise:* ....

- welche zu $\mathbb{A}$ und zu $\mathbb{B}$ gehören: ...

  diese bilden die sogenannte ....

  Schreibweise: ...... *Sprechweise:* ....

- welche zu $\mathbb{A}$ oder zu $\mathbb{B}$ gehören: ...

  diese bilden die sogenannte ....

  Schreibweise: ...... *Sprechweise:* ....

Aufgaben 3.10 *Löse* online*:*

- https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg882/
- https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg885/

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.1* / 13 - 18 **;** 13
Link zu den DiagrammVorlagen

Aufgaben 3.11 *Wir betrachten die folgenden Mengen:*

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{V}_2 \mid x < 9\} \ , \quad \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 14\}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{T}_{18} \ , \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x \in \mathbb{T}_{19}\}$$

Stelle die Situation in einem Mengendiagramm dar:

Bestimme die folgenden Mengen ...

1. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8\}$
2. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \mathbb{C}$
3. $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 18\}$
4. $\mathbb{D} \setminus \mathbb{A} = \{\ \} = \mathbb{D}$
5. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{D} = \mathbb{A}$
6. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \{\ \}$
7. $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} \cap \mathbb{D} = \{\ \}$
8. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$

und berechne ...

9. $\mid \mathbb{A} \mid \ = 4$
10. $\mid \mathbb{D} \setminus \mathbb{C} \mid \ = 0$
11. $\mid \mathbb{B} \cap \mathbb{D} \mid \ = 0$

Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 4*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.1* / 19 - 37 **;** 19, 23, 29, 33, 35

3.5.1 Graphische Darstellung der Operationen

Wir wollen die Mengenverknüpfungen noch graphisch an einem Beispiel zweier beliebiger Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ in einem Mengendiagramm betrachten:

Schraffiere im obigen Diagramm

- $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$
- $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
- $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$
- $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$

Folgendes fällt auf und wollen wir festhalten:

Bem.:
-
-
-

Noch zwei weitere Begriffe:

Definition 3.4 (*disjunkt*)

Zwei Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ heissen **disjunkt** $:\Leftrightarrow \ \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\ \}$

Definition 3.5 (*Komplementärmenge*)

$\mathbb{A}^c := \{x \in \mathbb{G} \mid x \notin \mathbb{A}\}$ *heisst die Komplementärmenge von* $\mathbb{A}(bzgl\mathbb{G})$.

und dazu passende Beispiele:

Beispiel 3.10

- Sei $\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A} \cap \mathbb{B} =$

  $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} =$

- Sei $\mathbb{A} = \mathbb{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A} \cap \mathbb{B} =$

  $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} =$

- Seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ disjunkt $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{A} \cap \mathbb{B} =$

  $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} =$

  $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} =$

Die zugehörigen graphischen Darstellungen:

Aufgaben 3.12 *Löse* online*:*

- https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg827/
- https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg828/

Mit Hilfe der *mathematisch beschreibenden Form* der Darstellung von Mengen lassen sich Differenz-, Schnitt-, Vereinigung- und Komplementärmenge sehr kurz und elegant definieren.
Wir nutzen diese Gelegenheit, um auch die Sprechweisen ein weiteres Mal zu wiederholen:

Definition 3.6 (*Mengenverknüpfungen*)

Seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ zwei nicht-leere Mengen und $\mathbb{G}$ eine Grundmenge, mit $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{G}$.

- $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{A} \mid x \notin \mathbb{B}\}$

  Sprechweise: *„A ohne B ist definiert als die Menge aller x in A für die gilt: x ist nicht in B "*

  und heisst **die Differenzmenge von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$**

- $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} := \ \ldots$

  Sprechweise: *„ ... ohne ... ist definiert als die Menge aller x in B für die gilt: x ist nicht in A "*

  und heisst **die Differenzmenge von $\mathbb{B}$ und $\mathbb{A}$**

- $\ldots\ldots \ := \ \{x \mid x \in \mathbb{A} \wedge x \in \mathbb{B}\}$

  Sprechweise: *„ A .... B ist definiert als die Menge aller x für die gilt: x ist in A ... x ist in B "*

  und heisst **die ....menge von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$**

- $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} := \ \ldots$

  Sprechweise: *„ A .... B ist definiert als die Menge aller x für die gilt: x ist in A ... x ist in B "*

  und heisst **die ....menge von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$**

- $\ldots\ldots \ := \ \ldots$

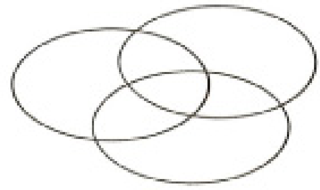
  Sprechweise: *„ .... "*

  und heisst **die Komplementärmenge von $\mathbb{A}$ bzgl $\mathbb{G}$**

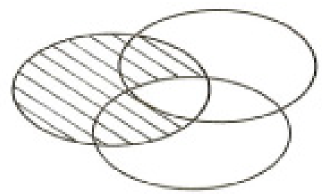
Mit den folgenden beiden Mengendiagrammen (ohne Grundmenge) wollen wir noch auf zwei Regeln aufmerksam machen, welche beim *Verknüpfen von mehreren Mengen* zu beachten sind:

Stelle die folgende Veknüpfung im nebenstehenden Diagramm dar:

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \cap \mathbb{C}$$



Stelle die schraffierte Fläche im nebenstehenden Diagramm durch Mengenverknüpfungen dar:



$\Rightarrow$ zu beachten ist die folgende Reihenfolge:

1.

2.

Beispiel 3.11 *Stelle die folgenden Mengen in einem Diagramm dar:*

1. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \cap \mathbb{C}$
2. $\mathbb{A} \setminus (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})$
3. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \cup \mathbb{C}^c$

Aufgaben 3.13 *Löse* online*:*

https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/interaufg/interaufg888/

Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 5*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.1* / 37 - 42 **;** 37, 40 a)b)c), 41
Kapitel 3.2 / (43 - 52) 53 - 64 **;** 53,55, 57, 63

Beispiel 3.12 In einem Wohnblock mit 20 Familien finden wir die folgende Verteilung von CD-Player, Radios und Fernsehgeräten vor:

- Zwölf Familien besitzen ein Radio.
- Ein Fernseher steht bei elf Familien im Wohnzimmer.
- Eine Familie besitzt einen CD-Player, aber kein weiteres Unterhaltungsgerät.
- Vier Familien besitzen alle drei Geräte.
- Zwei Familien besitzen Radio und Fernseher, aber keinen CD-Player.
- Sieben Familien haben einen Radio und einen CD-Player.
- Fünf Familien besitzen mindestens einen Fernseher und einen CD-Player.

Wir definieren weiter:

$\mathbb{C} :=$ Menge aller Familien, mit einem CD-Player.
$\mathbb{R} :=$ Menge aller Familien, mit einem Radio.
$\mathbb{F} :=$ Menge aller Familien, mit einem Fernseher.

1. Stelle die obigen Bedingungen mit Hilfe von Mengenverknüpfungen dar und bestimme die zugehörige Mächtigkeit.

2. Stelle die Situation in einem Mengendiagramm dar.

3. Stelle die folgenden Fragen in einer Mengenverknüpfung dar und beantworte sie:

   (a) Wie viele Familien besitzen keinen Radio ?

   (b) Wie viele Familien besitzen keinen Fernseher ?

   (c) Wie viele Familien besitzen keinen CD-Player ?

   (d) Wie viele Familien besitzen keines dieser drei Geräte ?

Aufgaben 3.14 *Eine schöne Aufgabensammlung von der* Kaufmännischen Berufsfachschule Glarus ...

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.2* / 67 - 78 **;** 67, 72, 73, 74

Aufgaben 3.15 *Gegeben sind die Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ und die Grundmenge $\mathbb{G}$, mit $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{G}$.*
Welche Beziehungen bestehen zwischen den Mengen $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ und $\mathbb{G}$ falls gilt:

1. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A}$
2. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\ \}$
3. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$
4. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{G}$
5. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{A}$
6. $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{A}^c$
7. $\mid \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \mid = \mid \mathbb{A} \mid$
8. $\mid \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \mid = 0$
9. $\mid \mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \mid = \mid \mathbb{A} \mid$

(Überlege dir, ob z.B. $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ gilt, oder $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, oder $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ disjunkt sind, ...)

Aufgaben 3.16 *Erkläre mit Hilfe eines Mengendiagramms die folgende Aussage:*

$$\mid \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C} \mid = \mid \mathbb{A} \mid + \mid \mathbb{B} \mid + \mid \mathbb{C} \mid - \mid \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \mid - \mid \mathbb{B} \cap \mathbb{C} \mid - \mid \mathbb{A} \cap \mathbb{C} \mid + \mid \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C} \mid$$

Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 6*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben (Rychenberg): *Kapitel 3.2* / 83 - 88 **;** 85, 87

Beispiel 3.13 Wir untersuchen die folgenden Fragestellungen zu den natürlichen Zahlen von 1 - 200:

1. Wie viele der Zahlen sind durch 2 oder 3 oder 5 teilbar?

2. Wie viele der Zahlen sind weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar?

Aufgaben 3.17 *Wie viele der Zahlen von 200 - 300*

1. *sind durch 2 oder 3 oder 5 teilbar?*
2. *sind weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar?*

Aufgaben 3.18 *Erkläre die folgende Situation: Ein Hund hat zwei Vorderbeine, zwei Hinterbeine, zwei Beine links und zwei Beine rechts.*
Er hat also 8 Beine.

3.6 *Meine* Zusammenfassung der Mengenlehre

Für eine *einfache* Repetition, nochmals der Link zu allen *online-Aufgaben*

des Schülerzirkel Mengenlehre, der Uni Stuttgart
bis und mit den Aufgaben 888

3.7 Eine Unterrichtspolka

Unterrichtsspolka

Mengenlehre

Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

3.8 Definitionen

Der Begriff	im Kapitel		auf Seite
definieren	3.1	*Übersicht*	2
Menge	3.2	*Die Menge im mathematischen Sinne*	5
Teilmengen	3.4	*Teilmengen*	17
disjunkt	3.5.1	*Graphische Darstellung der Operationen*	23
Komplementärmenge	3.5.1	*Graphische Darstellung der Operationen*	23
Mengenverknüpfungen	3.5.1	*Graphische Darstellung der Operationen*	24