

Das Rechnen mit Termen

1. Teil

Algebra

Kapitel 7

Gymnasiale Untertstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

28. Mai 2025

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

1 Unsere Zahlen

- 1.1 Wie die Zahlen zu uns kamen
- 1.2 Nicht-dezimale Zahlensysteme
- 1.3 Grosse Zahlen

2 Die natürlichen Zahlen

- 2.1 Die Rechenoperationen
- 2.2 Vermischte Operationen
- 2.3 Das Rechnen mit Potenzen

Eine Lernaufgabe zum Distributivgesetz:
[Kreuz und Quer und doch sicher richtig](#)

3 Mengenlehre

- 3.1 Übersicht
- 3.2 Die Menge im mathematischen Sinne
- 3.3 Darstellungsformen
- 3.4 Teilmengen
- 3.5 Rechnen mit Mengen
- 3.7 *Unterrichtspolka*

4 Teiler & Vielfache

- 4.1 Einleitung & Definitionen
- 4.2 Teilbarkeitssätze
- 4.3 Primzahlen
- 4.4 Einige Sätze aus der Zahlentheorie
- 4.5 Der ggT und das kgV

5 Die ganzen Zahlen

- 5.1 Einleitung
- 5.2 Repetition
- 5.3 Das Rechnen mit ganzen Zahlen
- 5.4 Eine *Aufgabenpolka* zum Rechnen mit ganzen Zahlen
- 5.5 Koordinatensysteme

6 Die rationalen Zahlen

6.1 Einleitung

6.2 Erweitern & Kürzen

6.3 Das Rechnen Brüchen

Inhaltsverzeichnis

7	Das Rechnen mit Termen	1
7.1	Einleitung & Überblick	1
7.2	Unsere Wissen in der Algebra - eine <i>SOL</i> -Repetition zum Rechnen in Zahlenmengen	2
7.3	Einfache Termumformungen	4
7.3.1	Summen & Differenzen	4
7.3.2	Produkte & Potenzen	5
7.3.3	Quotienten	6
7.3.4	Anwendungen des Distributivgesetzes	8
7.4	Polynome	12
7.4.1	Der Begriff des Polynoms	12
7.4.2	Polynomwerte & der Begriff der Funktion	15
7.5	Das Rechnen mit Polynomen	18
7.5.1	Diskussion im Plenum	22
7.6	<i>Meine</i> Zusammenfassung	23

7 Das Rechnen mit Termen

7.1 Einleitung & Überblick

Das Ziel ist eine grosse und nachhaltige Kompetenz im Umgang mit

dem Rechnen mit Zahlen & Buchstaben.

Um die wichtigsten Definitionen & Rechengesetze zusammenzutragen beginnen wir mit einer *SOL-Repetition* unseres Wissen über die Algebra, insbesondere der Zahlenmengen und des Rechnens mit Zahlen.

Mit vielen Beispielen und ebenso vielen Aufgaben werden wir mit *einfachen Termumformungen* die Rechenoperationen und -gesetze zur Anwendung bringen.

Der Begriff des *Polynoms* wird eingeführt und im Rechnen mit ihnen werden die im letzten Abschnitt erarbeiteten Fähigkeiten angewendet und gefestigt.

Wir werden die Polynome auch für **einen ersten Schritt in die *Analysis*** verwenden und den Begriff der *Funktion* einzuführen.

Beim *Rechnen mit Polyomen* werden wir unsere Fähigkeiten weiter festigen. Zur Kontrolle der eigenen Rechnungen werden wir mit *Photomat* arbeiten.

Als Aufgabensammlung verwenden wir von Gebauer/Zinn/ ...

Algebra 1
von Gebauer/Zinn/ ...
2. Auflage, 1993

in der üblichen Darstellung: *Aufgabenpool ; Pflicht*

7.2 Unsere Wissen in der Algebra - eine *SOL*-Repetition zum Rechnen in Zahlenmengen

Wir werden diese Repetition in *3er-Gruppen* und *selbständig organisiert* durchführen.

Aufgaben 7.1 *Der Auftrag:*

- *brainstorming ...*
- *Sammeln und Strukturieren der Begriffe
(mit der ganzen Klasse)*
- *Begriffe definieren, erklären und mit je zwei Beispielen ergänzen ...*
- *Präsentieren ...*

7.3 Einfache Termumformungen

Wir beginnen mit *einfachen Termumformungen* und werden dieses anhand von vielen Beispielen besprechen und jeweils auf die angewendeten Gesetzmässigkeiten hinweisen.

Noch mehr Beispiele müsst ihr als Aufgaben lösen.

7.3.1 Summen & Differenzen

Im Folgenden geht es darum, die gegebenen Terme (wenn möglich) durch *Termumformungen* zu vereinfachen:

Beispiel 7.1 • $a + a + a + a + a =$

• $b + 2b + 3b + 4c + 5c + 6c =$

• $d + 2d - 3d + 4d - 5d =$

• $e + 2e + 3e^2 - 5e + 6e^3 - 7e^2 + 8e =$

• $2f + 3f - (2f + 3g) + (3g - 2f) =$

• $(h + k + l) - (h + k) + (l - k + h) =$

• $[5i - 6j + (7j - 8i)] - [2i - (j - i)] =$

Wichtige eigene Bemerkungen:

Aufgabenpool: 104 - 126 ; 104d, 108c, 111b, 118b, 122c, 124a, 126

7.3.2 Produkte & Potenzen

Im Folgenden geht es wieder darum, die gegebenen Terme (wenn möglich) durch *Termumformungen* zu vereinfachen:

- Beispiel 7.2**
- $m \cdot m^2 \cdot m^4 =$

 - $5n \cdot 4n^2 \cdot 3n^3 =$

 - $4p^2 \cdot 5pq \cdot 6q^4 =$

 - $(-2r^2) \cdot (3rs^2)^3 \cdot s^0 =$

 - $t \cdot u^2 \cdot 3v^4 \cdot 0 \cdot 5(w^6)^7 + x^0 =$

 - $(-2xy) \cdot (-3x^2y)^4 \cdot (-5xy^2) =$

 - $\frac{1}{2}z \cdot \frac{4}{3}z^2 \cdot \frac{9}{8}z^3 \cdot 10z^4 =$

Wichtige eigene Bemerkungen:

Aufgabenpool: 127 - 151 ; 128c, 132d, 134b, 138b, 144b, 148b, 151

7.3.3 Quotienten

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich:

Beispiel 7.3 • $12x^2 : 6 =$

• $24ab^2 : 4ab =$

• $625r^2s^3 : 15rs^3 =$

• $(-144pq^4) : (-6q)^2 : (-p) =$

• $(-35p^2)^3 : 7^2p : (-25p^4) =$

Wichtige eigene Bemerkungen:

Aufgabenpool: 152 - 161 ; 154c, 156d, 158c, 160f, 161b

Warum dürfen wir machen, was wir gemacht haben/ noch machen werden ?

Begründe jede Änderung in der Darstellung ...

$$5a - 7(b + 3) + 6(b - 2) = 5a - (7b + 21) + (6b - 12) \quad (1)$$

(2)

$$= 5a - 7b - 21 + 6b - 12 \quad (3)$$

(4)

$$= 5a + (-7b) + (-21) + 6b + (-12) \quad (5)$$

(6)

$$= 5a + 6b + (-7b) + (-21) + (-12) \quad (7)$$

(8)

$$= 5a + b \cdot (6 - 7) + ((-21) + (-12)) \quad (9)$$

(10)

$$= 5a + b(-1) + (-33) \quad (11)$$

(12)

$$= 5a - b - 33 \quad (13)$$

und was fehlt ?

7.3.4 Anwendungen des Distributivgesetzes

1. Ausmultiplizieren

Beispiel 7.4 • $5x \cdot (3a + b) =$

• $5x \cdot (3a + b - c) =$

• $12a^3b^4 \cdot (5c - 6d^2 + 7b^3 - ab) =$

2. Ausklammern

Beispiel 7.5 • $2c + 2d =$

• $5c^2d - 10cd =$

• $1e^2 + 2e^3f - 3e^2f^2 =$

Wichtige eigene Bemerkungen:

3. Ausdividieren

Beispiel 7.6 • $(25x + 20y - 15z) : 5 =$

• $(-24ax^2 + 12bx - 18x^2) : 6x =$

• $(-24ax^2 + 12bx - 18x^2) : 6 \cdot x =$

• $(22t^3x^2 + 11t^6x^3 - 33x^2t^2) : \frac{1}{2}xt =$

4. Mehrfache Anwendung des Distributivgesetzes

Zur Vorbereitung: $(a + b)(c + d) =$

Beispiel 7.7 • $(e + f)(g + h) =$

• $(j^2 + k^3)(k^2 + j^3) =$

• $(r + s)(w - x) =$

Zur Vorbereitung: $(a - b)(c + d - e) =$

Beispiel 7.8 • $(f - g)(h + i - j) =$

• $(f - g)(h + i + j) =$

• $(f + g)(h - i - j) =$

• $(5x + 2)(3x - 1) =$

• $(y - 5)(y - 3) =$

• $(t - 2)(t + 3) =$

Weitere Beispiele:

Beispiel 7.9 • $(x + 1)(x^2 - 2x + 3) =$

• $(x - 1) \cdot x \cdot (x + 2) \cdot 3$

• $(r + 1)(r - 2)(r + 3) =$

• $(s^3 + 2t)(3t^2 - 2s)(s^2 + t^2) =$

Wichtige eigene Bemerkungen:

Aufgabenpool: 162 - 192 ; 165a, 171b, 172b, 181a, 183a, 188a, 190c, 191d

7.4 Polynome

7.4.1 Der Begriff des Polynoms

Zur Einführung des Begriffs die folgenden Beispiele:

- $x^2 - x$
- $3x^3 + 2x^2 + x^1 - 42$
- $r^{20} - r^{34} + r^3$
- $t^6 + 5t^4 - 7t + 12$

Eine Weiterführung der Definition führt auf die folgende Darstellung:

Def.: Ein **Polynom n-ter Ordnung (in x)** ist ein mathematischer Ausdruck der folgenden Form:

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$$

mit $a_i, x \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und $a_i = \textit{konst.}$

Beispiel 7.10 • $2 + 3x + 4x^2$

ist ein Polynom ...

mit $a_0 =$

$a_1 =$

$a_2 =$

• $5 - 0.2y + 3y^2 - \sqrt{8}y^3$

ist ein Polynom ...

mit $a_0 =$

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

- $2z^2 + 1 - 5z$

ist ein Polynom ...

mit $a_0 =$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

- $3r^2 - 9r^{33}$

ist ein Polynom ...

mit $a_0 =$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$\dots = -9$$

- $3x^2 - 66x^{78} + 12x^{54}$

ist ein Polynom ...

mit $a_0 =$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$\dots = -66$$

$$\dots = 12$$

$$\dots = 54$$

$$a_{100} =$$

- $23q^3p^2 - 4p^5 + 6pq$

ist ein Polynom ...

mit $a_0 =$

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

- Gib ein Beispiel eines
 1. Polynoms 6ter Ordnung in x ...
 2. Polynoms 354ten Grades in t ohne konstantes Glied ...
 3. Polynoms 354ten Grades in t mit konstantem Glied ...
 4. Polynoms 23ten Grades in q , mit einem Vielfachen der 16ten Potenz von q ...
 5. Polynoms 23ten Grades in q , mit einem Vielfachen der 32ten Potenz von q und einem konstanten Glied ...
 6. Polynoms 32ten Grades in q , mit einem Vielfachen der 32ten Potenz von p und ohne konstantes Glied ...

7.4.2 Polynomwerte & der Begriff der Funktion

Durch Ersetzen der Parameter in einem Polynom durch Zahlenwerte erhalten wir einen *Wert für das Polynom*:

Beispiel 7.11

- Berechne den Wert des Binoms $5a^2 - b$ für

1. $a = 1, b = 2,$

2. $a = 2, b = 1,$

3. $a = (-2), b = 0.$

- Berechne die Werte des Trinoms $(-2)c^3 - c^2d + cd^2$ für

1. $c = 2, d = (-3),$

2. $c = 0, d = (-1),$

3. $c = a, d = b^2,$

4. $c = 2a, d = (-4b),$

5. $c = d.$

Für ein Polynom, das nur von einer Variablen abhängig ist, können wir die folgende Schreibweise einführen:

$$P(x) = x^2 + 3x - 5$$

und die Berechnung von Polynomwerten lässt sich dann wie folgt darstellen:

- $P(2) =$

- $P(0) =$

- $P(-1) =$

Aufgabenpool: 1 - 8 ; 4a, 5, 8a

Bei der Bestimmung von Polynomwerten wird jeweils einer Variablen genau ein Wert zugeordnet, was uns auf einen zentralen Begriff der Mathematik führt, den Begriff der *Funktion*:

Def.: Eine **Funktion** ist

Bem.: • Begriffserklärungen/ Sprechweisen:

Beispiel 7.12 Bestimme die Funktionswerte:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(a) $f(0) =$

(b) $f(-1) =$

(c) $f(2) =$

2. $g(t) = t - 7$

(a) $g(0) =$

(b) $g(-2) =$

(c) $g(1) =$

3. $v(s) = -s + 23$

(a) $v(3) =$

(b) $v(-7) =$

(c) $v(t) =$

Beispiel 7.13 Bestimme die weiteren Funktionswerte:

4. $a(b) = -2b^3 + 3b^2$

(a) $a(0) =$

(b) $a(-1) =$

(c) $a(2) =$

5. $b(a) = a^3 - 4a + 23$

(a) $b(4) =$

(b) $b(-2) =$

(c) $b(r^s) =$

(d) $b(\frac{1}{2}) =$

(e) $b(2a) =$

6. $t(x) = -2x + x^2 + 1.5$

(a) $t(y) =$

(b) $t(-2r) =$

(c) $t(\frac{1}{2}) =$

(d) $t(\frac{3}{2}) =$

7. $h(a) = a^3 - a^2$, $k(b) = b^2 - 1$

(a) $h(0) - k(0) =$

(b) $k(x) + h(x) =$

(c) $h(2) - k(-1) =$

7.5 Das Rechnen mit Polynomen

Beim *Rechnen mit Polynomen* gehen wir gleich wie bei den *Termumformungen* vor, d.h., wir müssen einmal mehr die befolgen, von welchen uns bis jetzt die folgenden schon bekannt sind:

-
-
-
-
-
-

Wir werden aber *nicht* wie üblich mit der Theorie & einführenden Beispielen an die zugehörigen Aufgaben herangehen, sondern aus den vorgegebenen Aufgaben müsst ihr eure Theorieunterlagen selber zusammenstellen und mit drei für euch wichtigen Beispiele und euren eigenen Bemerkungen ergänzen. Dazu werde ich euch für den Einstieg jeweils fünf Aufgaben mit den Lösungen & dem zugehörigen Aufgabenpool angeben. Ihr müsst diese Aufgaben mit eurem Banknachbarn diskutieren, eure Erkenntnisse aufschreiben und mit drei selber aus dem Aufgabenpool ausgewählten Beispielen ergänzen.

Zur Unterstützung werden wir mit *Photomat* arbeiten:

<https://www.photomath.net/de/>

Mit *Photomat* könnt ihr die Lösungswege und die Resultate selbständig überprüfen.

• **Addition & Subtraktion:** Kapitel 2 (a)

- Aufgaben (Lösung):
- 12** a) $(-7v + 10w)$
 - 24** c) $(2p + 2q)$
 - 36** a) $(-2m^2 - 3m + 2)$
 - 43** b) $(-z + 3)$
 - 44** b) (0)

Aufgabenpool: 9 - 44

• **Multiplikation:** Kapitel 2 (b)

Aufgaben (Lösung):

52 a) $(m^7 - m^5 + m^3 - m)$

54 b) $(y_1^2 y_4 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_4^2)$

78 a) $(x^4 - 10x^2 y^2 + 16y^4)$

88 b) $(a^5 + b^5)$

98 c) $(a + b - 11)$

Aufgabenpool: 45 - 106

• **Division:** Kapitel 2 (b)

- Aufgaben (Lösung):
- 114 a)** $(\frac{1}{2}b^2)$
 - 116 c)** $(\frac{1}{28}mq)$
 - 122 b)** $(\frac{8}{21}z^2 - \frac{5}{6}z - \frac{9}{14})$
 - 124 a)** (-1)
 - 128 a)** $(\frac{2}{3}c)$

Aufgabenpool: 109 - 128

7.5.1 Diskussion im Plenum

Meine Erkenntnisse aus der Diskussion mit der ganzen Klasse:

7.6 *Meine Zusammenfassung*