

# Gleichungslehre 2. Teil

## Algebra

### *Kapitel 8*

Unterstufe Gymi

Ronald Balestra  
CH - 8046 Zürich  
[www.ronaldbalestra.ch](http://www.ronaldbalestra.ch)

**Name:**

**Vorname:**

5. Juni 2020

## Inhaltsverzeichnis

8.6	Repetition - <i>Grundlagen</i> . . . . .	2
8.7	Textaufgaben . . . . .	9
8.8	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	14
8.9	Ungleichungen . . . . .	22
8.10	<i>Meine</i> Formelsammlung für die Gleichungslehre . . . . .	26

## Teil 2:

Wir werden folgende Themen behandeln:

- **Repetition;**  
dafür seid ihr selber verantwortlich und ist für diejenigen, welche auch immer *ihre* Zusammenfassungen geschrieben haben, ein zeitlich sehr kurzer Aufwand.
- **Textaufgaben;**  
wir werden gemeinsam kurz einige Aufgaben besprechen. Wer noch tiefergehende Erklärungen benötigt, steht ein Link zu den Musterlösungen mit ausführlichen Musterlösungen zur Verfügung.

... und auch noch etwas Neues:

- **Gleichungssysteme;**  
die Fähigkeit, (lineare) Gleichungssystem zu lösen, ermöglicht uns auch komplexere Fragestellung, welche wir durch mehrere Gleichungen mathematischen Methoden zugänglich machen, lösen zu können.  
Wir werden bei Textaufgaben feststellen, dass deren Darstellung durch mehrere Gleichungen mit mehrerer Variablen einfacher ist als durch eine Gleichung mit nur einer Variablen. Durch intensives Üben werden wir noch sehen, dass für das Lösen von (linearen) Gleichungssystemen das *kleinen Ein-mal-Eins* ausreicht.
- **Ungleichungen;**  
werden die auf der Zahlengerade untersuchen ... und mit unserem Wissen aus der Behandlung der ganzen Zahlen, dass eine gerade/ungerade Anzahl negativer Zahlen das Produkt positiv/negativ ist, wird es einfach sein, die zugehörigen Lösungsmengen zu bestimmen.

## 8.6 Repetition - *Grundlagen*

Links zu Aufgaben ...

- [http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/ ... .pdf](http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/...pdf)
- [http://members.chello.at/ ... .pdf](http://members.chello.at/...pdf)
- <https://dk4ek.de/mathematik/gleich1.pdf>

Die Unterlagen aus dem letzten Link wollen wir auf den folgenden Seiten kurz ansprechen:

## Lösung umfangreicherer linearer Gleichungen

Am Beispiel folgender Aufgabe wollen wir das Lösungsprinzip umfangreicherer linearer Gleichungen darstellen.

$$6x + 5 - (2x - 3) - 2 = 4 \cdot (2x - 2) + x$$

Die erste Frage, die man sich immer stellen muss:

*Kann man vor dem Umstellen der Gleichung etwas zusammenfassen?*

Zur der Beantwortung dieser Frage schaut man immer nach zweierlei in dieser Reihenfolge:

1. Gibt es Klammern, die aufgelöst werden können?
2. Gibt es gleichartige Terme, die zusammengefasst werden können?

Es gibt hier beides, Klammern und gleichartige Terme. Klammern sind auf beiden Seiten je eine, und es kann auf der linken Seite die  $+5$  und die  $-2$  zusammengefasst werden. Am besten löst man erst die Klammern auf. Dabei immer beachten:

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen,  
dann kehren sich alle Vorzeichen in der aufgelösten Klammer um!

$$6x + 5 - (2x - 3) - 2 = 4 \cdot (2x - 2) + x$$

$$6x + 5 - 2x + 3 - 2 = 8x - 8 + x$$

Nun kann man gleichartige Terme zusammenfassen wie  $+6x$  und  $-2x$  oder  $+5$  und  $+3$  auf der linken Seite sowie  $+8x$  und  $+x$  auf der rechten Seite:

$$4x + 6 = 9x - 8$$

Danach gehts wie gewohnt weiter:

$$4x + 6 = 9x - 8 \quad | -9x - 6$$

$$-5x = -14 \quad | : (-5)$$

$$x = \frac{14}{5} = 2,8$$

## Übungsaufgaben dazu:

**Aufgabe 1:**

$$4x - (x + 6) = 5 \cdot (x - 3)$$

**Aufgabe 2:**

$$3x - (x + 8) = 4(x - 3)$$

**Aufgabe 3:**

$$3(2x - 4) + 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 2)$$

**Aufgabe 4:**

$$4 \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 11)$$

**Aufgabe 5:**

$$(5x - 5) \cdot (2x - 2) = (5x + 4) \cdot (2x - 3) - 11x$$

**Aufgabe 6:**

$$(x - 1) \cdot (10x - 10) = (5x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) - 11x$$

**Aufgabe 7:**

$$(2x - 4)(3x + 5) - (5x - 5)(x - 1) = (x - 2)(x + 3) - 13$$

**Aufgabe 8:**

$$(3x + 5)(2x - 4) - (x - 1)(5x - 5) + 13 = (x + 3)(x - 2)$$

**Aufgabe 9:**

$$3x - \left(4x - \left(5 - (x + 4)\right)\right) - 5 = -12$$

**Aufgabe 10:**

$$5x - \left(6x - \left(4 - (x + 3)\right)\right) - 3 = -10$$

## Hier die Ergebnisse:

**Aufgabe 1:**

$$x = \frac{9}{2} = 4,5$$

**Aufgabe 2:**

$$x = 2$$

**Aufgabe 3:**

$$x = \frac{26}{10} = 2,6$$

**Aufgabe 4:**

$$x = 2$$

**Aufgabe 5:**

$$x = 11$$

**Aufgabe 6:**

$$x = 11$$

**Aufgabe 7:**

$$x = \frac{6}{7}$$

**Aufgabe 8:**

$$x = \frac{6}{7}$$

**Aufgabe 9:**

$$x = 4$$

**Aufgabe 10:**

$$x = 4$$

## Hier die kompletten Lösungen:

### Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}4x - (x + 6) &= 5 \cdot (x - 3) && | \text{ Klammern auflösen} \\4x - x - 6 &= 5x - 15 && | \text{ links zusammenfassen} \\3x - 6 &= 5x - 15 && | -5x + 6 \\-2x &= -9 && | : (-2) \\x &= \frac{9}{2} = 4,5\end{aligned}$$

### Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}3x - (x + 8) &= 4(x - 3) && | \text{ Klammern auflösen} \\3x - x - 8 &= 4x - 12 && | \text{ links zusammenfassen} \\2x - 8 &= 4x - 12 && | -4x + 8 \\-2x &= -4 && | : (-2) \\x &= 2\end{aligned}$$

### Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}3(2x - 4) + 2 &= 12 - 2 \cdot (2x - 2) && | \text{ Klammern auflösen} \\6x - 12 + 2 &= 12 - 4x + 4 && | \text{ rechts und links zusammenfassen} \\6x - 10 &= 16 - 4x && | +10 + 4x \\10x &= 26 && | : 10 \\x &= \frac{26}{10} = 2,6\end{aligned}$$

### Aufgabe 4:

$$4 \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 11) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

Aufgepasst! Es spielt keine Rolle, ob man den Malpunkt setzt oder weglässt, beides bedeutet das Gleiche. Also ist:  $2 \cdot x = 2x$  oder:  $2 \cdot (2x - 11) = 2(2x - 11)$

$$\begin{aligned}8x + 12 - 2 &= 12 - 4x + 22 && | \text{ auf beiden Seiten zusammenfassen} \\8x + 10 &= 34 - 4x && | -10 + 4x \\12x &= 24 && | : 12 \\x &= 2\end{aligned}$$

**Aufgabe 5:**

$$(5x - 5) \cdot (2x - 2) = (5x + 4) \cdot (2x - 3) - 11x \quad | \text{ alle Klammern auflösen}$$

Auch hier gilt wieder: Es ist gleichgültig, ob ein Malpunkt gesetzt ist, oder nicht. Also lassen wir ihn einfach weg.

Werden zwei Summen in Klammern miteinander multipliziert, so wird jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert, etwa so:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Damit ergibt sich aufgelöst:

$$10x^2 - 10x - 10x + 10 = 10x^2 - 15x + 8x - 12 - 11x \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$10x^2 - 20x + 10 = 10x^2 - 18x - 12 \quad | -10x^2$$

$$-20x + 10 = -18x - 12 \quad | +18x - 10$$

$$-2x = -22 \quad | : (-2)$$

$$x = 11$$

**Aufgabe 6:**

$$(x - 1) \cdot (10x - 10) = (5x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) - 11x \quad | \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$10x^2 - 10x - 10x + 10 = 10x^2 - 15x + 8x - 12 - 11x \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$10x^2 - 20x + 10 = 10x^2 - 18x - 12 \quad | -10x^2$$

$$-20x + 10 = -18x - 12 \quad | +18x - 10$$

$$-2x = -22 \quad | : (-2)$$

$$x = 11$$

**Aufgabe 7:**

$$(2x - 4)(3x + 5) - (5x - 5)(x - 1) = (x - 2)(x + 3) - 13 \quad | \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$6x^2 + 10x - 12x - 20 - (5x^2 - 5x - 5x + 5) = x^2 + 3x - 2x - 6 - 13 \quad | \text{ Klammer links auflösen}$$

$$6x^2 + 10x - 12x - 20 - 5x^2 + 5x + 5x - 5 = x^2 + 3x - 2x - 6 - 13 \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$x^2 + 8x - 25 = x^2 + x - 19 \quad | -x^2$$

$$8x - 25 = x - 19 \quad | -x + 25$$

$$7x = 6 \quad | : 7$$

$$x = \frac{6}{7}$$

**Aufgabe 8:**

$$(3x + 5)(2x - 4) - (x - 1)(5x - 5) + 13 = (x + 3)(x - 2) \quad | \quad \text{Klammern ausmultiplizieren}$$

$$6x^2 - 12x + 10x - 20 - (5x^2 - 5x - 5x + 5) + 13 = x^2 - 2x + 3x - 6 \quad | \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$6x^2 - 12x + 10x - 20 - 5x^2 + 5x + 5x - 5 + 13 = x^2 - 2x + 3x - 6 \quad | \quad \text{zusammenfassen}$$

$$x^2 + 8x - 12 = x^2 + x - 6 \quad | \quad -x^2$$

$$8x - 12 = x - 6 \quad | \quad -x + 12$$

$$7x = 6 \quad | : 7$$

$$x = \frac{6}{7}$$

**Aufgabe 9:**

$$3x - \left(4x - \left(5 - (x + 4)\right)\right) - 5 = -12$$

Bei einer solchen geschachtelten Klammer fängt man am besten an, die innersten Klammern zuerst aufzulösen, im nächsten Schritt wieder die innersten und so weiter:

$$3x - \left(4x - (5 - x - 4)\right) - 5 = -12 \quad | \quad \text{innerste Klammer auflösen}$$

$$3x - (4x - 5 + x + 4) - 5 = -12 \quad | \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$3x - 4x + 5 - x - 4 - 5 = -12 \quad | \quad \text{zusammenfassen}$$

$$-2x - 4 = -12 \quad | \quad +4$$

$$-2x = -8 \quad | : (-2)$$

$$x = 4$$

**Aufgabe 10:**

$$5x - \left(6x - \left(4 - (x + 3)\right)\right) - 3 = -10 \quad | \quad \text{innerste Klammer auflösen}$$

$$5x - \left(6x - (4 - x - 3)\right) - 3 = -10 \quad | \quad \text{innerste Klammer auflösen}$$

$$5x - (6x - 4 + x + 3) - 3 = -10 \quad | \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$5x - 6x + 4 - x - 3 - 3 = -10 \quad | \quad \text{zusammenfassen}$$

$$-2x - 2 = -10 \quad | \quad +2$$

$$-2x = -8 \quad | : (-2)$$

$$x = 4$$

## 8.7 Textaufgaben

**Aufgaben 8.1** *Fasse die Vorgehensweise zur Behandlung von Textaufgaben zusammen:*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Beispiel 8.1** *Eine Treppe hat 22 Stufen. Wenn jede Stufe um 1.6cm höher gebaut würde, könnten zwei Stufen eingespart werden.  
Wie hoch ist eine Stufe?*

**Beispiel 8.2** *In einem Stall leben Hühner und Kaninchen. Alfred zählt 171 Köpfe und 498 Beine.  
Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen leben in diesem Stall?*

**Beispiel 8.3** *Ein Teil eines Kapitals von 70'350 Euro ist zu 6% angelegt, der andere zu 5%. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4'100 Euro.  
Wie gross sind die beiden Teile?*

**Beispiel 8.4** *Anna benötigt drei Stunden, um einen Auftrag zu erledigen. Berta würde für den gleichen Auftrag zwei Stunden benötigen.  
Wie lange brauchen Anna und Berta, wenn sie die Arbeit gemeinsam anpacken?*

**Beispiel 8.5** *Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr als ein grosser, um allein eine Arbeit durchzuführen. Beide gemeinsam könnten die Arbeit in je 20 Fahrten erledigen.  
Wie viele Fahrten benötigt jeder Lastwagen, wenn er die Arbeit alleine bewältigt?*

**Beispiel 8.6** *Ein leeres Schwimmbecken kann durch die Zuflussleitung in 15 Stunden gefüllt werden. Ist das Becken voll, so dauert es 20 Stunden, um das Wasser wieder ablaufen zu lassen. Das Becken ist nun leer. Die Besitzerin will es füllen, vergisst jedoch, den Ablauf zu schliessen. Wie lange dauert es, bis das Schwimmbecken trotzdem voll ist?*

**Beispiel 8.7** *Eine zweiziffrige Zahl hat die Quersumme 12. Werden die Ziffern vertauscht, so wird die Zahl 1.75-Mal so gross. Welche Zahl hat diese Eigenschaft?*

**Beispiel 8.8** *Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B. Berechne die Laufzeit von A.*

Für ausführlicher besprochene Lösungswege

<https://www.macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele.shtml>

## 8.8 Lineare Gleichungssysteme

Wir haben bei einigen der letzten Textaufgaben den Lösungsweg für ein (kleines) Gleichungssystem schon kennengelernt und wollen das Lösungsverfahren auf grössere Systeme anwenden.

Für den Einstieg wollen wir noch klein bleiben:

**Beispiel 8.9** *Lorena beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 3kg Äpfel und 1kg Birnen kauft und dafür Fr. 7.20 bezahlt. Ein weiterer Kunde bezahlt für 2kg Äpfel und 5kg Birnen derselben Sorte Fr. 15.20. Lorena überlegt sich nun, wie gross der Kilopreis der Äpfel, bzw der Birnen ist.*

Die Lösungsmethoden an folgendem Beispiel *Schritt für Schritt*:

$$\begin{aligned}7y &= 5 - 2x \\2 - 8y &= 4x\end{aligned}$$

- **Einsetzungsverfahren**

- **Gleichsetzungsverfahren**

- **Additionsverfahren**

**Aufgabenpool:** p.174,... / 17 - 52; 17a,b, 25, 27a, 29, 35, 45a, 47b

**Aufgaben 8.2** *Zwei Pralinensorten kosten Fr. 6.50 und Fr. 9.50 pro 250g. Wie viele Gramm jeder Sorte sollte es in einer 250g-Packung haben, damit diese Fr. 7.80 kostet?*

**Aufgaben 8.3** Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x \cdot \sqrt{3} + 2y &= \sqrt{2} \\ 3x + y \cdot \sqrt{2} &= 6\end{aligned}$$

**Beispiel 8.10** *In der Qualifikation 2002/03 haben die ZSC Lions 44 Spiele bestritten. Die Anzahl Spiele, welche sie nicht verloren haben ist dreimal grösser als die Anzahl Niederlagen. Zudem hatten sie 14 Siege mehr als Niederlagen auf ihrem Konto. Berechne die Anzahl Niederlagen, Unentschieden und Siege, welche die ZSC Lions in der Qualifikation gespielt haben.*

Wir wollen die Lösungsmethode an folgenden Beispielen nochmals durchgehen:

**Beispiel 8.11** *Das Lösungsverfahren für ein (lineares)  $3 \times 3$  - Gleichungssystem:*

$$3x - 2y + 5z = 23$$

$$2x + 4y - z = -3$$

$$5x + 2y + 2z = 14$$

**Beispiel 8.12** *Das Lösungsverfahren geht natürlich auch für ein (lineares)  $\dots \times \dots$ -Gleichungssystem:*

$$\begin{aligned}x + y - z &= -1 \\x - y - z &= 3 \\2y + 3z - w &= -3 \\-2x + 2z + 3w &= -5\end{aligned}$$

**Aufgabenpool:** p.186,... / 133 - 149; 133a, 143b, (149b)

Zum Abschluss noch etwas *Geschichtliches*:

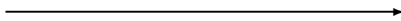
**Aufgaben 8.4** *Im Arithmetischen Handbuch von CHANG Ch'iu-chien erscheint um 475 n.Chr folgende Aufgabe:*


Ein Hahn kostet 5 sapeks, eine Henne 3 sapeks  
und 3 Küken 1 sapek.


Wenn wir nun für 100 sapeks 100 dieser Tiere einkaufen, wie viele sind es dann von jeder Sorte?

## 8.9 Ungleichungen

Bestimme jeweils die *Lösungsmenge* der folgenden Ungleichungen und stelle sie graphisch dar:

•  $x + 2 > 0$  

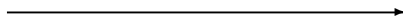
$x + 2 = 0$  

$x + 2 < 0$  

•  $2x + 3 < 4$



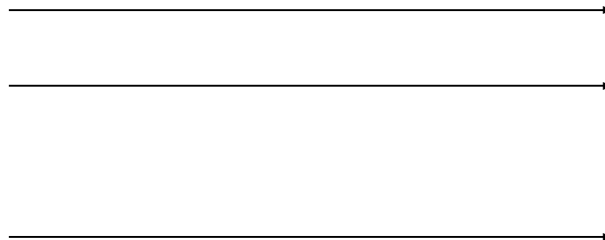
•  $3x + 4 > 5x$



•  $(6x - 7)(8 + 9x) < 12(x + 2) + 54x^2$



•  $(x - 2)(x + 3) > 0$

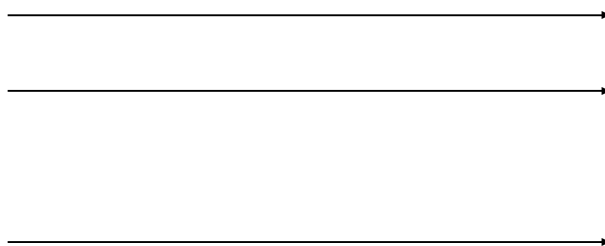


**Aufgaben 8.5** *Bestimme die Lösungsmengen:*

$$x^2 + 2x - 35 < 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 > 0$$



**Aufgaben 8.6** *Bestimme die Lösungsmenge:*

$$(x + 1)(x - 4)(x + 8) < 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 - 15x + 54) > 0$$

**Aufgaben 8.7** Bestimme die Lösungsmengen:

1.  $-5x \leq 7$

2.  $3x + 2 < 1 - 4x$

3.  $(x + 2)(x - 1) > 0$

4.  $(x - 2)(x + 1)(1 - x)(2 + x) \geq 0$

5.  $x^2 + 4x - 5 > 0$

6.  $x^2 - x \leq 30$

7.  $-3x^4 + 6x^3 + 24x^2 > 0$

8.  $-16x^5 + x < 0$

## 8.10 *Meine* Formelsammlung für die Gleichungslehre