Dreiecke

Geometrie

Kapitel 2

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

18. August 2024

zur Homepage

zur Übersicht *Untergymnasium*

zur Übersicht *Geometrie*

zu den Dreiecken

zum aktuellen Skript

zu den Aufgaben & Lösungen

Überblick über die bisherigen *GEOMETRIE* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

2 Das Dreieck

Wir werden uns in diesem Kapitel mit einer für die Geometrie sehr zentralen Figur auseinandersetzen:

dem Dreieck

Die grosse Bedeutung des Dreiecks liegt darin, dass sich jede geradlinig begrenzte Figur in Dreiecke zerlegen lässt (Triangulation) und wir davon ausgehend von den Eigenschaften der Teildreiecke auf die Eigenschaften der ursprünglichen geometrischen Figur schliessen können.
Eine solche Anwendung kennen wir schon:

Warum ist die Winkelsumme in einem Viereck 360^0 ?

Wir werden uns vorerst weniger mit solchen Schlussfolgerungen beschäftigen, als mehr mit den *Grundbegriffen* am und im Dreieck.
Die üblichen *Notationen* und die einem Dreieck zugehörigen geometrischen Grössen werden wir kennenlernen und ebenso deren *Konstruktionen* besprechen. Das bedeutet, dass unsere Geschicklichkeit im Umgang mit Geodreieck & Zirkel wieder gefragt ist.
Zu den Konstruktionen gehören auch die *speziellen Dreiecksformen*. Ebenso das Konzept der *geometrischen Orte*, wo die Mengenlehre und die Konstruktion von Mengen eine gemeinsame Anwendung finden und für die Dreieckskonstruktionen sehr hilfrecih sein wird.
Den Abschluss bildet die Diskussion, unter welchen Bedingungen wir Dreiecke eindeutig konstruieren können. Dies führt uns dann auf die *Kongruenzsätze*

In den Aufgabenserien geht es dann mehrheitlich um das *Konstruieren von Dreiecken* und auch wieder um *Winkelberechnungen*. Im Zusammenhang mit den Lösungen der Konstruktionen werden wir wieder mit der freeware *GeoGebra* arbeiten.

Dazu folgender Link:

ICT am UG

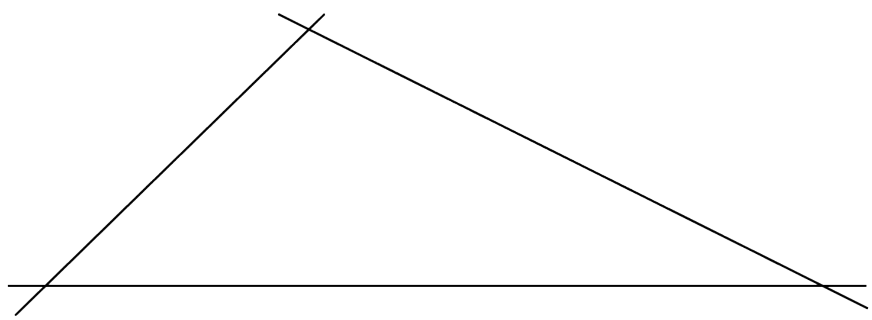
Einführung in GeoGebra

Geometrie - Grundlagen

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

2.1 Grundbegriffe und Notationen im & am Dreieck

Wir werden die Grundbegriffe am Dreiecke definieren und die zugehörigen *üblichen* Notationen einführen. Insbesondere werden wir auch deren Konstruktionen besprechen.



- die **Höhe** h_c

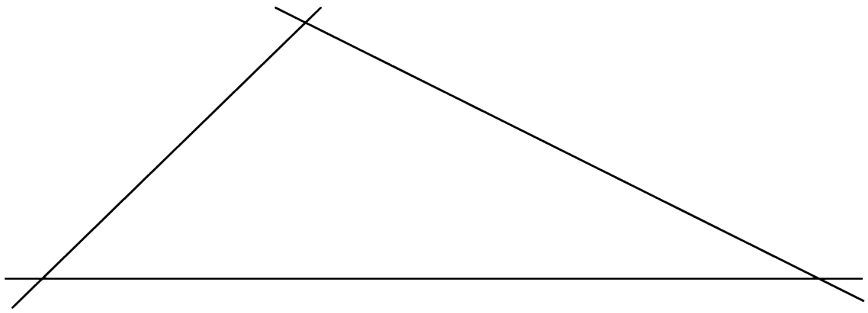
  ist definiert als der **Abstand** der Ecke C zur Seite c

  und wird wie folgt konstruiert: $\perp$ zu c durch C

- die **Winkelhalbierende** …

  ist definiert als

  und wird wie folgt konstruiert:



- die **Seitenhalbierende** ...

  ist definiert als

  und wird wie folgt konstruiert:

- die **Mittelsenkrechte** ...

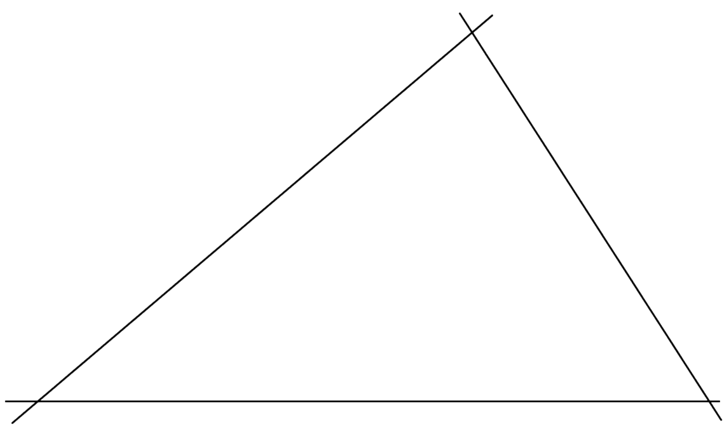
  ist definiert als

  und wird wie folgt konstruiert:

Aufgaben 2.1 Wenn du mit *GeoGebra* arbeitest:
Verwende für jede der folgenden Aufgaben ...

- *ein neues* ggb-*file,*
- *stelle die gegebenen Dreiecke in blauer Farbe dar*
- *und die Lösungen jeweils in einer anderen Farbe.*

- Konstruiere alle Winkelhalbierenden:

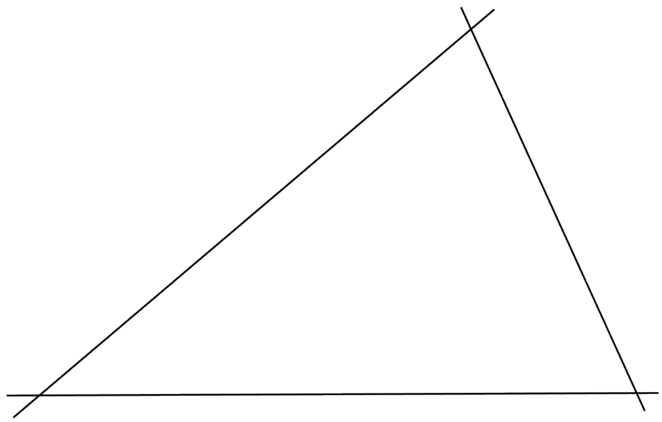


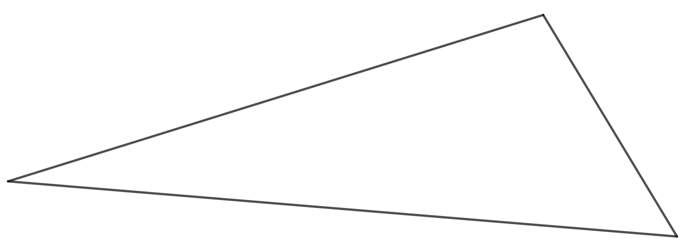
Wir stellen fest:

Untersuche weiter ...

- ○ Miss mehrere Abstände von den Schenkeln zur jeweiligen Winkelhalbierenden.
- ○ Miss die Abstände des Schnittpunktes zu den Seiten.

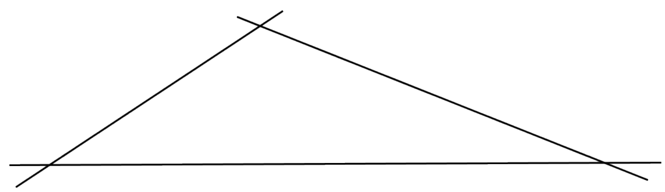
- *Konstruiere alle Höhen:*





Wir stellen fest:

- *Konstruiere alle Seitenhalbierenden/Schwerlinien:*

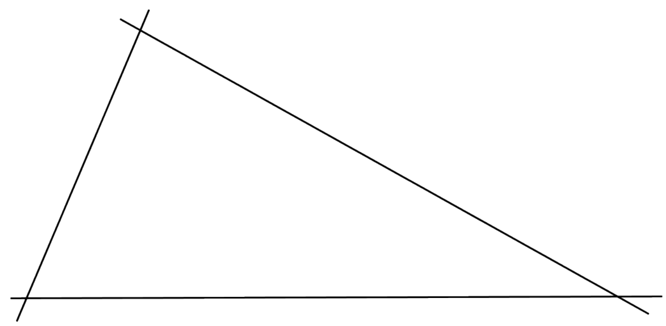


Wir stellen fest:

Untersuche weiter ...

  ◦ die Abstände auf den Seitenhalbierenden/Schwerlinen vom Schwerpunkt zur Seitenmitte, bzw zur Dreiecksecke.

- *Konstruiere alle Mittelsenkrechten:*



Wir stellen fest:

Untersuche weiter ...

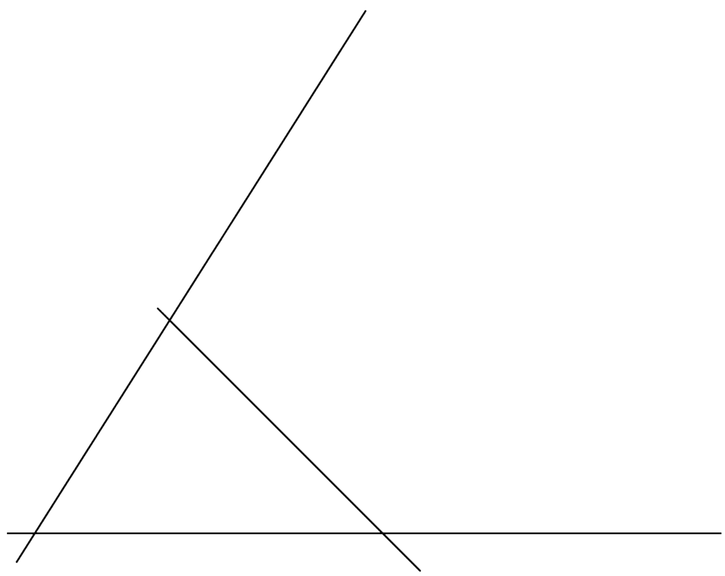
  - die Abstände vom Schnittpunkt zu den Ecken des Dreiecks.

2.1.1 In- & Ankreise

Den **Inkreissatz**, mit welchem die Konstruktion den Inkreises beschrieben wird, kennen wir schon:

Satz 1 *(Der Inkreissatz)*

Konstruiere den Inkreis:



- Für den Ankreis soll gelten:

  Der **Ankreis** soll eine Dreiecksseite von aussen und die Verlängereungen der beiden anderen Seiten berühren.

- Und den Mittelpunkt finden wir ...

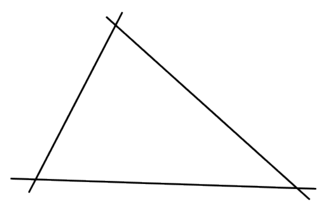
Wir können somit den **Ankreissatz** wie folgt formulieren:

Satz 2 *(Der Inkreissatz)*

Aufgaben 2.2 *Konstruiere*

- *den In- & Umkreis,*
- *alle Ankreise*

und zeiche alle Berührungsradien *ein.*



Wir schliessen mit einer wichtigen Aussage:

Satz 3 *(Die Dreiecksungleichung)*
In jedem Dreieck ist die Summe der Länge zweier Seiten grösser als die Länge der dritten Seite.
d.h.: Es gilt folgendes:

Aufgaben 2.3 *Finde ein Beispiel, wo zwei Ungleichungen erfüllt sind, das Dreieck aber nicht konstruierbar ist.*

Aufgaben 2.4 *Beweise den Satz* geometrisch

2.2 Der Feuerbachkreis & die Eulergerade

Die folgende Aufgabe soll euch ermöglichen, eure eigene Genauigkeit selber zu überprüfen, in dem ihr folgendes konstruiert:

Aufgaben 2.5 *Gebe dir ein beliebiges Dreieck ΔABC vor und konstruiere*

- *alle Seitenmitten M_a, M_b und M_c,*
- *alle Höhenfusspinkte H_a, H_b und H_c,*
- *den Höhenschnittpunkt H,*
- *den Schwerpunkt S.*

auf der nächsten Seite geht's weiter ...

Deine *Konstruktionsgenauigkeit* kannst du nun selber überprüfen:

1. Alle Seitenmitten und Höhenfusspunkte liegen auf einem Kreis,

   dem **Feuerbachkreis**

   Er hat noch eine weitere Eigenschaft, die du selber herausfinden kannst:
   Konstruiere dazu die Strecken zwischen den Ecken des Dreiecks ΔABC und dem Höhenschnittpunkt und schneide sie mit dem Feuerbachkreis.
   Was fällt auf:

2. Der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Feuerbachkreises liegen auf einer Geraden,

   der **Eulergeraden**

   Sie hat noch eine weitere Eigenschaft, die du ebenfalls selber herausfinden kannst:
   Konstruiere dazu den Umkreis des Dreiecks ΔABC.
   Was fällt auf:

Links ...

- zur Theorie von Michael Holzapferl
- zu einer ggb - Lösung

Aufgaben 2.6 *Gebe dir ein beliebiges Dreieck ΔABC vor.*
Konstruiere den Inkreis, den Umkreis, den Feuerbachkreis und einen beliebigen Ankreis.
Als zusätzliche Anwendung von GeoGebra*:*
Verwende verschiedene Farben und führe Kontrollkästchen *ein.*

2.3 Spezielle Dreiecksformen

2.3.1 Gleichschenklige Dreiecke

Definition 1

Ein Dreieck heisst **gleichschenklig** $:\Leftrightarrow$

Aufgaben 2.7 *Skizziere & konstruiere mit ultrakurzem Lösungsbericht ein gleichschenkliges Dreieck* ΔABC *mit mit* $a = b = 7cm$ *und* $\gamma = 70^0$.

Eigenschaften:

2.3.2 Gleichseitige Dreiecke

Definition 2

Ein Dreieck heisst **gleichseitig** $:\Leftrightarrow$

Aufgaben 2.8 *Skizziere & konstruiere mit ultrakurzem Lösungsbericht ein gleichseitiges Dreieck* ΔABC *mit* $a = b = c = 9cm$.

Eigenschaften:

2.3.3 Spitz-, stumpf- & rechtwinklige Dreiecke

Aufgaben 2.9 *Definiere die obigen Dreieckstypen und konstruiere je ein zugehöriges Beispiel.*

Definition 3

Ein Dreieck heisst **spitzwinklig** :$\Leftrightarrow$

Ein Dreieck heisst **stumpfwinklig** :$\Leftrightarrow$

Ein Dreieck heisst **rechtwinklig** :$\Leftrightarrow$

Aufgaben 2.10 *Gegeben ist ein Dreieck* ΔABC *mit* $\alpha = 90^0$.
Weiter liegen die Punkte D *und* E *so auf der Seite* a, *dass gilt:* $\overline{CA} = \overline{CD}$ *und* $\overline{BA} = \overline{BE}$.

- *Skizziere die Situation.*
- *Konstruiere ein Dreieck* ΔABC,*welches die obigen Bedingungen erfüllt.*
- *Mit* ultrakurzem *Lösungsbericht.*
- *Berechne den Winkel* $\angle DAE$.

2.4 Das rechtwinkligen Dreieck seine Notationen & Eigenschaften

Skizziere ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck:

Aufgaben 2.11 *Eine kleine Anwendung: (mit den üblichen Bezeichnungen)*

> *Wird der rechte Winkel γ so in α und β zerlegt, dass β an a und α an b liegt, so entsteht die Seitenhalbierende s_c.*

- *Konstruiere die Situation mit Hilfe von $\angle-$ Verschiebungen und messe nach.*
- *Kontrolliere mit Hilfe der Konstruktion der Seitenhalbierenden.*
- *Beweise rechnerisch: z.Z. ist:* $\overline{AM_c} = \overline{BM_c}$

Aufgaben 2.12 *Konstruiere über der folgenden Hypotenuse mehrere rechtwinklige Dreieck:*

Was lässt sich vermuten?

Diese Eigenschaft wird in folgenden Satz zusammengefasst:

Es gilt auch die *Umkehrung* des Satzes von Thales:

Aufgaben 2.13 *Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck* ΔABC

1. *mit einer Hypotenuse von* $8cm$ *und einer Höhe von* $3cm$,
2. *mit einer Hypotenuse von* $6cm$ *und einem Winkel* $\alpha = 33^0$.

Geometrie-Aufgaben: *Dreiecke 2*
(Zugehörige Lösungen)

Aufgaben 2.14 *Wir gehen von einem beliebigen, gleichschenkligen* ΔABC *mit der Spitze* C *aus.*
Weiter schneidet ω_α *die Seite* a *in* D *und das Lot zu* ω_α *durch* D *schneidet* $\overline{AB}$ *in* E.

- *Skizziere die Situation.*
- *Konstruiere das Dreieck* ΔABC, *mit Lösungsbericht.*
- *Berechne den Winkel* $\angle DAE$.

Wir bauen unsere **Aufgabe 2.10** weiter aus:

Aufgaben 2.15 *Gegeben ist ein Dreieck* ΔABC *mit* $\alpha = 90^0$.
Weiter liegen die Punkte D *und* E *so auf der Seite* a*, dass gilt:* $\overline{CA} = \overline{CD}$ *und* $\overline{BA} = \overline{BE}$.

- *Skizziere die Situation.*
- *Konstruiere ein Dreieck* ΔABC*,welches die obigen Bedingungen erfüllt.*
- *Mit* ultrakurzem *Lösungsbericht.*
- *Berechne den Winkel* $\angle EAD$.
- *Berechne die Winkel* $\angle AED$ *und* $\angle ADE$ *in Abhängigkeit von* β.
- *Wie gross muss* β *sein, damit das Dreieck* ΔADE *gleichschenklig wird, mit* $\overline{DE}$ *als Basis?*

2.5 Geometrische Orte & weitere Dreieckskonstruktionen

Bei den bisherigen Konstruktionen haben wir *Eigenschaften geschnitten*. Diese Vorgehensweise lässt sich auch mengentheoretisch erklären und führt uns auf den Begriff des

Geometrischen Ortes,

einer Menge von Punkten mit spezifischen Eigenschaften.

Durch das *Schneiden Geometrischer Orte* entstehen Mengen, deren Elemente Punkte, Geraden, ... sind, welche die Eigenschaften aller beteiligten geometrischen Orte besitzen:

- Die Menge aller Punkte, welche von einem Punkt P einen konstanten Abstand d haben ...

- Die Menge aller Punkte, welche von einer Gerade g einen konstanten Abstand d haben ...

- Die Menge aller Punkte, welche eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ unter einem 90^0-Winkel sehen ...

- Die Menge aller Punkte, welche mit dem Endpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ verbunden und der Strecke selber einen festen Winkel α einschliessen ...

Aufgaben 2.16 *Untersuche die Konstruktion des Ankreises auf die Verwendung von Geometrische Orte.*

Beispiel 2.1 Konstruiere ein Dreieck ΔABC, mit

$$c = 8cm,\ h_c = 5cm \text{ und } \alpha = 35^0$$

und diskutiere die geometrischen Orte.

Beispiel 2.2 Konstruiere ein Dreieck ΔABC, mit

$$b = 6cm,\ c = 7cm \text{ und } h_c = 4cm$$

und diskutiere die geometrischen Orte.

2.6 Die Kongruenzsätze und weitere Konstruktionsaufgaben

Wir beginnen als Einstieg mit folgenden Konstruktionen:

Aufgaben 2.17 *Konstruiere das Dreieck* ΔABC *mit*

$$a = 4cm,\ b = 6cm \quad und \quad c = 7cm$$

Aufgaben 2.18 *Konstruiere das Dreieck* ΔABC *mit*

$$a = 4cm,\ b = 6cm \quad und \quad \alpha = 38^0$$

Wir haben bei mehreren Aufgaben aber auch festgestellt, dass die geforderten Bedingungen an ein Dreieck nicht-hinreichend sind (Geometrie-Aufgaben: Dreiecke 2, Aufg 1), um es eindeutig oder überhaupt konstruieren zu können.

Nicht-hinreichende Angaben für die Konstruktion eines eindeutig bestimmten Dreiecks sind z.B. die Angaben von

-
-
-
-
-

Hinreichend sind z.B. die Angaben von 3 Seitenlängen.

Aufgaben 2.19 *Formuliere ein eigenes Beispiel und konstruiere es. (mit Lösungsbericht)*

Wir stellen fest:

und fassen unsere Erkenntnis im 1. Kongruenzsatz zusammen:

1. Kongruenzsatz:

Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent,
falls sie in den Grössen aller Seiten übereinstimmen.

Weitere hinreichende Bedingungen zur Konstruktion von (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmten Dreiecke sind in den folgenden Aussagen enthalten:

2. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, ...

... falls sie in den Längen zweier Seiten und der Grösse des Zwischenwinkels übereinstimmen.

3. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, ...

... falls sie in den Längen zweier Seiten und der Grösse des der längeren Seite gegenüberliegendem Winkel übereinstimmen.

4. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, ...

... falls sie in der Länge einer Seite und den Grössen zweier Winkel übereinstimmen.

Aufgaben 2.20 *Untersuche die folgenden Aufgaben zuerst auf Kongruenzeigenschaften und konstruiere anschliessend alle (verschiedenen) Dreiecke:*

1. $a = 5cm, \; b = 6cm, \; \gamma = 70^0$

2. $a = 5.5cm,\ c = 5cm,\ \alpha = 70^0$

3. $b = 4cm,\ c = 6cm,\ \beta = 35^0$

4. $c = 6cm,\ \alpha = 40^0,\ \beta = 85^0$

5. $c = 5.5cm,\ \beta = 55^0,\ \gamma = 60^0$

Aufgaben 2.21 *Wir gehen von folgendem Dreieck aus:*

$$\Delta ABC \ mit \ \gamma = 90^0, \ c = 9cm \ und \ a = 5cm$$

1. *Konstruiere das Dreieck* ΔABC.
2. *Konstruiere die Mittelpunkte* M_1 *und* M_2 *der Umkreise von* ΔAM_cC *und* ΔBCM_c.
3. *Beweise:* $M_1M_2 \perp CM_c$.
4. *Untersuche* konstruktiv *(mit GeoGebra) die Lage des Schnittpunktes* P *der Geraden* AM_1 *und* BM_2 *und bestimme anschliessend den Winkel* $\angle ABP$.

Weitere *Typen* von Dreieckskonstruktionen werden wir in

Kongruenzabbildungen

Geometrie

Kapitel 3

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

kennenlernen und diskutieren.

2.7 *Meine* Zusammenfassung