Kongruenzabbildungen

KurzVersion

Geometrie

Kapitel 3

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

3. Juli 2023

Ein Überblick über die bisherigen *GEOMETRIE* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

3 Kongruenzabbildungen

Wir werden uns in diesem Kapitel mit dem Begriff der sog.

Kongruenzabbildungen

auseinandersetzen.

Im Titel sind zwei Begriffe vereint:

- Kongruenz
- Abbildung

wobei wir einen schon kennengelernt haben:

kongruent sein heißt deckungsgleich sein,
d.h. gleiche Größe & gl. Form

Unsere *Ziele* werden sein,

die einzelnen Begriffe zu erklären,

die Kongruenzabbildungen und deren Eigenschaften zu diskutieren

und sie natürlich in Konstruktionsaufgaben anzuwenden,

GeoGebra kennen und anwenden zu lernen.

den Zusammenhang zwischen den Kongruenzabbildungen in einem *SOL*-Projekt zu erarbeiten.

Von spezieller Bedeutung sind auch die Aufgabenserien. Es wird jeweils eure Aufgabe sein, die wichtigsten Erkenntnisse aus dem Lösen der Aufgaben im Theorieheft zusammenzufassen.

3.1 Der Begriff der Abbildung

Wenn wir schon die Kongruenz*abbildungen* diskutieren wollen müssen wir auch wissen, was eine *Abbildung* ist:

Def.: Eine **Abbildung** f ist eine Vorschrift, die jedem Urbildpunkt P genau einen Bildpunkt P' zuordnet: $P \longmapsto P'$

Beispiel 3.1 · Ein Punkt P wird verschoben.

$$P \xmapsto{\text{Verschiebung}} P'$$

· Ein Dreieck ΔABC wird gedreht.

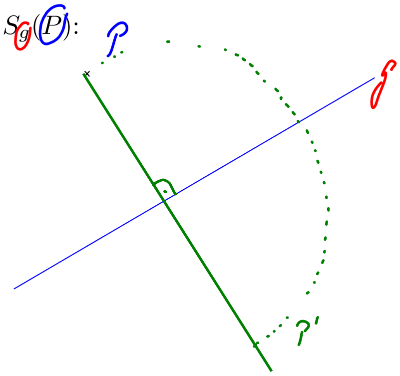
$$\Delta ABC \xmapsto{\text{Drehung}} \Delta' A'B'C'$$

Bem.:

- Schreibweise: $f(P) = P'$, $P \xmapsto{f} P'$
- Sprechweise: f von $P = P'$, P wird abgebildet (unter f) auf P'
- und eine Abbildung heisst **kongruent** wenn Bild und Urbild gleiche Form & gleiche Größe haben
- Schreibweise: $\Delta \cong \Delta'$

3.2 Achsenspiegelungen (Geradenspiegelungen)

Beispiel 3.2 Konstruiere $S_g(P)$:

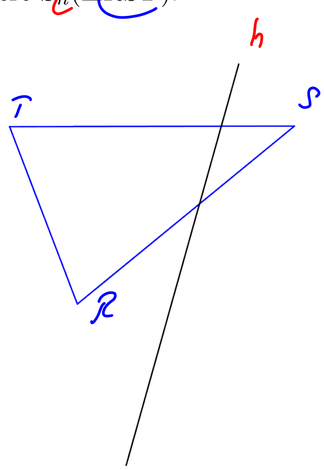


<u>Def.:</u> Eine **Achsenspiegelung**

hängt ab von der Spiegelungsgeraden g

=> Schreibweise: $S_g(\dots)$

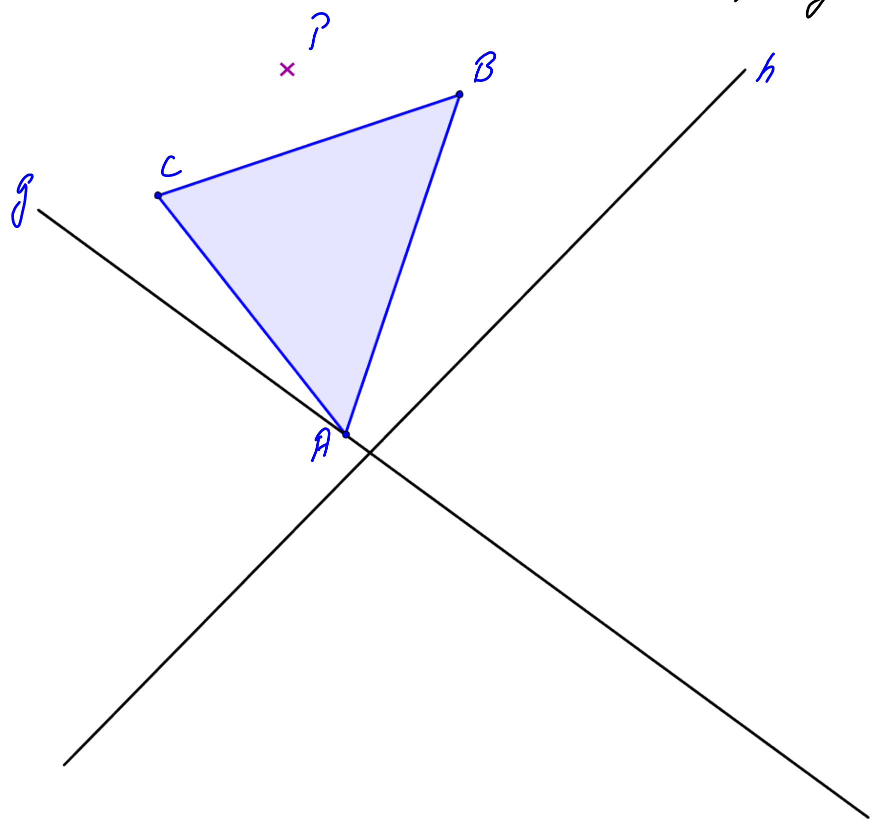
Beispiel 3.3 Konstruiere $S_h(\Delta RST)$:



Von Innen nach aussen

Aufgaben 3.1 *Konstruiere*

- $S_h \circ S_g(P)$ $= S_h(S_g(P)) = S_h(P') = P''$
- $S_g \circ S_h(\Delta ABC)$ $= \underbrace{S_g(S_h(\Delta))}_{\text{zuerst } h, \text{ dann } g} = S_g(\Delta') = \Delta''$



3.2.1 *Meine* Erkenntnisse aus der Aufgabenserie 1

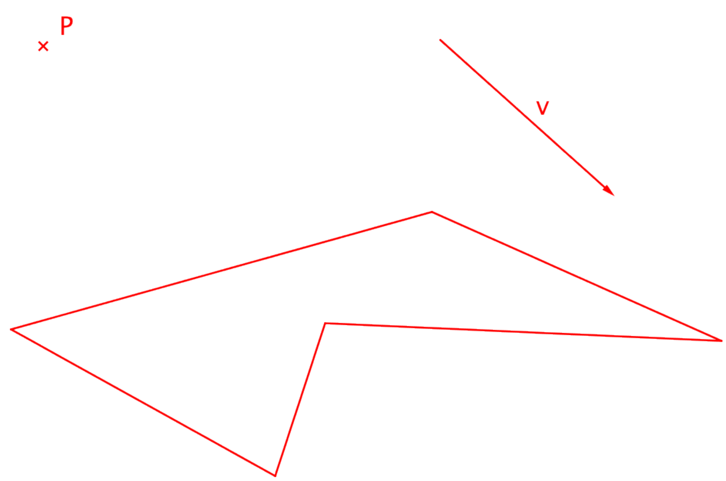
3.3 Verschiebungen (Translationen) - der Begriff des Vektors

<u>Def.:</u> Eine Abbildung, die jeden Punkt einer Figur gleich weit in die gleiche Richtung verschiebt heisst eine **Translation**

$\Rightarrow$ um eine Translation *eindeutig* festlegen zu können brauchen wir

-
-

Aufgaben 3.2 *Konstruiere*
- $T_{\vec{v}}(P)$,
- $T_{\vec{v}}(ABCDE)$.



Geometrie-Aufgaben: *Kongruenzabbildungen 3*
(Zugehörige Lösungen)

3.3.1 *Meine* Erkenntnisse aus der Aufgabenserie 3

Geometrie-Aufgaben: *Kongruenzabbildungen 4*
(Zugehörige Lösungen)

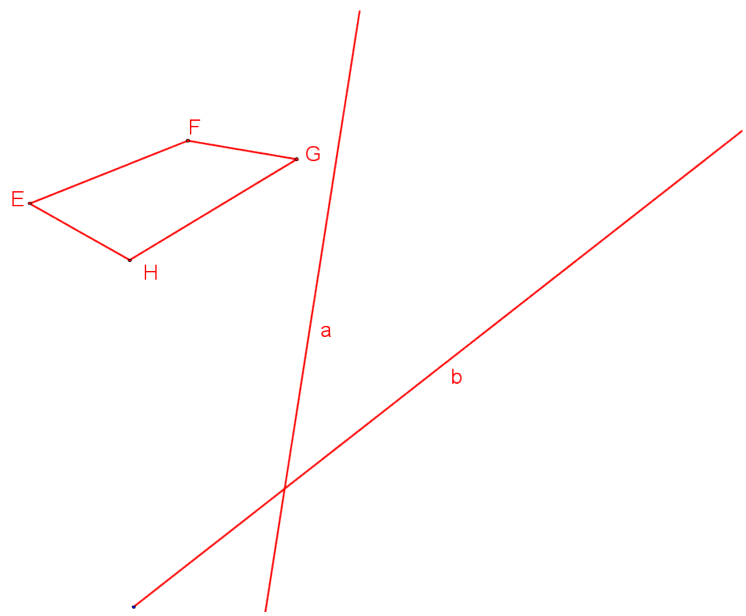
Geometrie-Aufgaben: *Kongruenzabbildungen 5*
(Zugehörige Lösungen)

3.3.2 *Meine* Erkenntnisse aus der Aufgabenserie 4 & 5

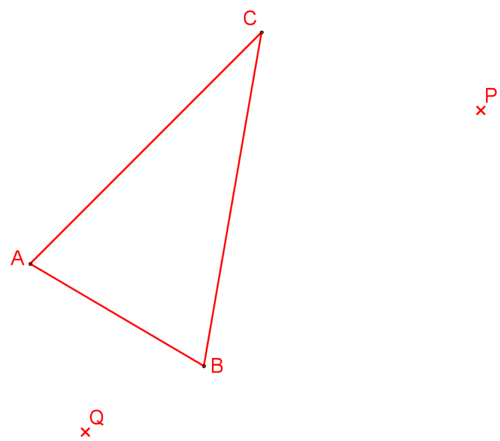
3.4 Drehungen (Rotationen)

Wir kommen zu einer weiteren Kongruenzabbildung, der *Drehung*, und wollen die Abbildung dazu verwenden, um einen ersten Zusammenhang zwischen den verschiedenen Kongruenzabbildungen aufzuzeigen:

Aufgaben 3.3 *Konstruiere* $S_b \circ S_a(EFGH)$



Aufgaben 3.4 *Drehe das Dreieck* ΔABC *bezüglich dem Zentrum* P *mit* $\alpha = 75^0$,
Drehe das Dreieck ΔABC *bezüglich dem Zentrum* Q *mit* $\beta = -30^0$.



Untersuche die Verknüpfung auf Kommutativität.

Aufgaben 3.5 *Konstruiere zwei beliebige, zueinander kongruente Dreiecke* Δ *und* Δ' *mit gleicher Orientierung.*

Konstruiere das Drehzentrum Z*, so dass gilt:* $D_Z(\Delta) = \Delta'$

Geometrie-Aufgaben: *Kongruenzabbildungen 6*
(Zugehörige Lösungen)

3.4.1 *Meine* Erkenntnisse aus der Aufgabenserie 6

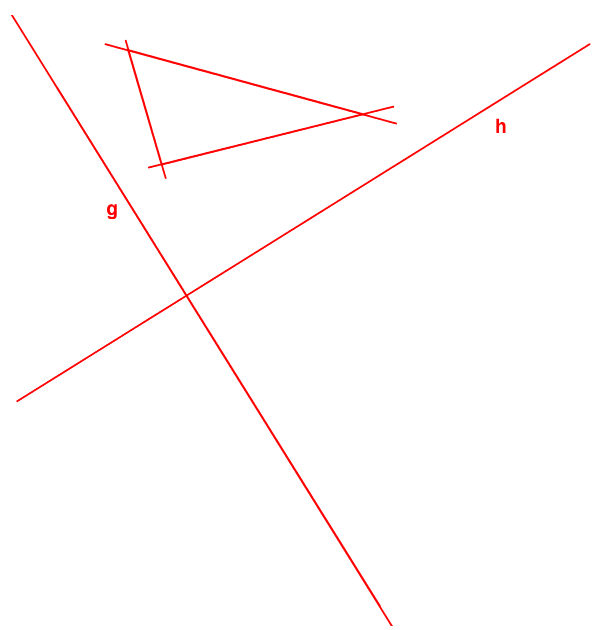
3.5 Punktspiegelung

Wir haben im vorherigen Abschnitt festgestellt, dass wir

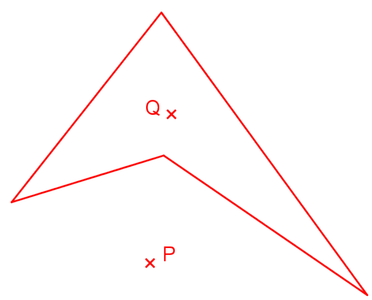
- die Verknüpfung zweier Achsenspiegelungen an sich schneidenden Spiegelungsgeraden durch eine Drehung ersetzen können,
- die Verknüpfung zweier Achsenspiegelungen an zu einander parallelen Geraden durch eine Translation ersetzen können.

Wir wollen nun den Fall untersuchen, wo die Spiegelungsgeraden senkrecht zueinander stehen:

Aufgaben 3.6 *Konstruiere* $S_g \circ S_h(\Delta ABC)$



Aufgaben 3.7 *Spiegele das Viereck EFGH am Punkt P,*
Spiegele das Viereck EFGH am Punkt Q.



Geometrie-Aufgaben: *Kongruenzabbildungen 7*
(Zugehörige Lösungen)

3.5.1 *Meine* Erkenntnisse aus der Aufgabenserie 7

3.6 Die Verknüpfung von Kongruenzabbildungen *eine Lernaufgabe*

Wir verwenden dazu die folgende Lernaufgabe:

Selbständiges Arbeiten

UG

Die Verknüpfung von Kongruenzabbildungen

Klasse U2g

Sept.'14 / R. Balestra

3.6.1 Ein neuer Konstruktionstyp

Wir wollen uns in beiden Aufgaben jeweils durch *Herantesten* ein Lösungsverfahren erarbeiten:

1. Aufgabe

Gegeben ist eine Gerade g, ein Kreis K mit $g \cap K = \{\ \}$ und ein beliebiger Punkt A.
Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit $B \in g$ und $D \in K$.

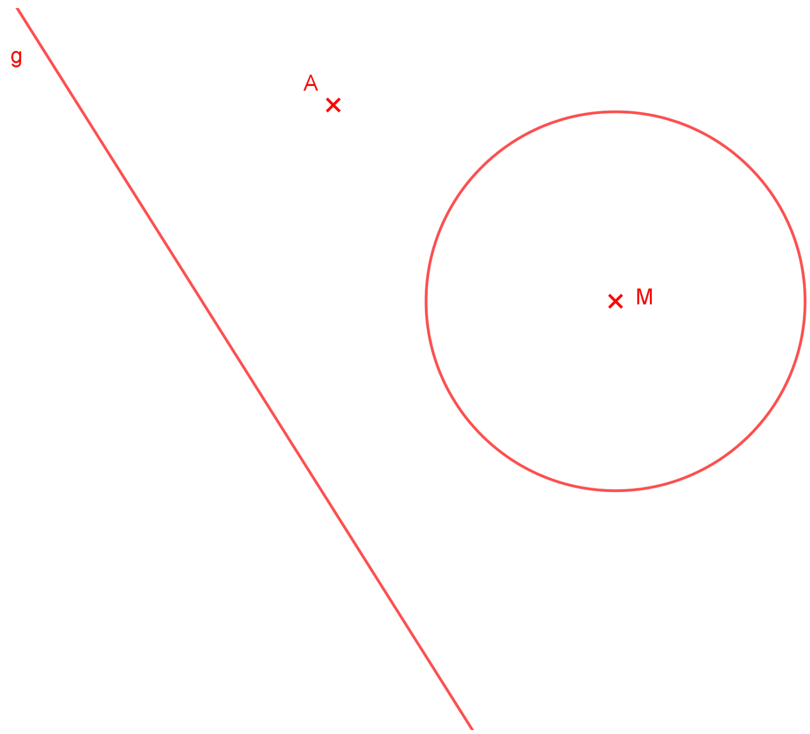
Wir wollen uns nun an die Lösung herantesten, in dem wir mehrere Quadrat konstruieren, die nur *eine* der geforderten Bedingungen erfüllt: $B \in g$

<u>Skizze:</u>

Wir stellen fest ...

Die Aufgabe:

Gegeben ist die Gerade g, der Kreis K mit $g \cap K = \{\ \}$ und der Punkt A.
Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit $B \in g$ und $D \in K$.
(Die ggb−Vorlage ist auf meiner homepage zu finden, unter Lösungen zur Theorie ...)



Als Vorbereitung für die Aufgabe **5)** aus der Aufgabenserie ***Kongruenzabbilungen 8*** wollen wir die folgende Situation diskutieren:

2. Aufgabe

Konstruiere die folgende Situation:

> Gegeben sind zwei konzentrische Kreise um den Mittelpunkt M und ein gleichseitiges Dreieck ΔABC, so dass auf jedem Kreis genau ein Eckpunkt des Dreiecks liegt.

Skizze:

Wir stellen fest ...

Geometrie-Aufgaben: *Kongruenzabbildungen 8*
(Zugehörige Lösungen)

3.6.2 *Meine* Erkenntnisse aus der Aufgabenserie 8

3.7 Schlussbemerkungen

Wir haben in den bisherigen Stunden u.a. gelernt,

- was Abbildungen sind ...

- was Kongruenzabbildungen sind ...

- was Kongruenzabbildungen für Eigenschaften haben ...

- und was es heisst, wenn zwei Figuren zueinander kongruent sind: ...

und zu diesen Kongruenzabbilungen gibt es noch eine wichtige geometrische Eigenschaft, welche wir in folgendem **Satz** (ohne Beweis) festhalten wollen:

Satz (i) Jede orientierungserhaltende Kongruenzabbildung lässt sich durch (maximal) zwei Achsenspiegelungen darstellen.

(ii) Jede nicht-orientierungserhaltende Kongruenzabbildung lässt sich durch (maximal) drei Achenspiegelungen darstellen.

3.7.1 Schlussaufgaben

Aufgaben 3.8 *Gib Dir ein beliebiges Dreieck* ΔABC *vor und*

1. *verschiebe das* ΔABC *um einen von Dir vorgegebenen Vektor* $\vec{v}$ *und ersetze Deine Translation durch Achsenspiegelung(en),*
2. *drehe das* ΔABC *um ein von Dir vorgegebenes Drehzentrum* Z *und einen ebenfalls von Dir gewählten Winkel* φ *und ersetze Deine Rotation durch Achsenspiegelung(en),*
3. *spiegele das* ΔABC *an einem von Dir gewählten Punkt* P *und ersetze Deine Punktspiegelung durch Achsenspiegelung(en).*
4. *spiegele das* ΔABC *an einer von Dir vorgegebenen Achse* g *und ersetze Deine Achsenspiegelung durch eine Verknüpfung anderer Achsenspiegelungen.*

3.7.2 *Meine* Zusammenfassung