

Flächenberechnungen
&
-verwandlungen
mit Pythagoras und Anwendungen

Geometrie

*Kapitel 5 - **Papierversion***

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

8. Januar 2024

Ein Überblick über die bisherigen *GEOMETRIE* - Themen:

1 Einführung in die Geometrie - Grundbegriffe

- 1.1 Ein kurzer historischer Überblick
- 1.2 Prägende Persönlichkeiten
- 1.3 Warum Geometrie?
- 1.4 Punkt, Strecke, Strahl & Gerade
- 1.5 Das Geodreieck
- 1.6 Der Zirkel
- 1.7 Winkeleigenschaften

ggb-Begleitmaterial zum 1. Teil der Einführung

Einführung in die Geometrie Grundlagen Teil 2

- 1.9 Winkelkonstruktionen - ein *SOL* - Projekt
- 1.10 eine *Lernaufgabe über die regelmässigen 5-Ecke*
- 1.11 Das Billardspiel
- 1.12 Abstandsbestimmungen
- 1.13 Körper
mit einer *Werkstatt zu den Platonischen Körpern*
- 1.14 Wo bin ich? Koordinatensysteme

2 Das Dreieck

- 2.1 Grundbegriffe und Notationen im & am Dreieck
- 2.2 Der Feuerbachkreis & die Eulergerade
- 2.3 Spezielle Dreiecksformen
- 2.4 Notationen & Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks
- 2.5 Geometrische Orte & weitere Dreieckskonstruktionen
- 2.6 Die Kongruenzsätze

3 Kongruenzabbildungen

3.1 Der Begriff der Abbildung

3.2 Achsenspiegelungen

3.3 Verschiebungen

3.4 Drehungen

3.5 Punktspiegelungen

3.6 *GeoGebra* und die Geometrie - *ein SOL-Projekt*

3.7 Die Verknüpfung von Kongruenzabbildungen - *eine Lernaufgabe*

3.8 Anwendungen bei Dreieckskonstruktionen

3.9 Schlussbemerkungen

4 Vierecke

Inhaltsverzeichnis

5	Flächenberechnungen	1
5.1	Einleitung	1
5.2	Messen & Masse	3
5.3	Flächeninhalt einfacher Figuren	6
5.3.1	Die Flächenformeln einfacher geometrischer Figuren - ein Gruppen SOL-Projekt mit Lernaufgaben	7
5.3.2	Der Rhombus	7
5.3.3	Das Parallelogramm	9
5.3.4	Das Dreieck	10
5.3.5	Das Trapez	12
5.3.6	Beliebige, geradlinig begrenzte Vielecke	14
5.4	Flächenverwandlungen	15
5.4.1	Grundaufgaben	18
5.4.2	Ergänzungsparelogramme	24
5.5	Die Satzgruppe des Pythagoras	26
5.5.1	Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck	26
5.5.2	Der Satz des Euklid (der Kathetensatz)	27
5.5.3	Der Satz des Pythagoras	29
5.5.4	Der Höhensatz	32
5.5.5	Eine <i>SOL-Klassenarbeit</i> zu Anwendungen der Flächenverwandlungen	33
5.5.6	Geometrisches Wurzelziehen	37
5.5.7	Die Algebra der Wurzel	39
5.5.8	Wurzelziehen von Hand	42
5.5.9	Die Menge der reellen Zahlen	43
5.5.10	Pythagoras in speziellen geometrischen Figuren	44
5.6	Pythagoras im Raum	46
5.6.1	Koordinatensysteme im \mathbb{R}^3	46
5.6.2	Koordinatensysteme im \mathbb{R}^3 - mit <i>GeoGebra</i>	49
5.6.3	Der Normwürfel	50
5.7	Die <i>Dualität</i> unter den Platonischen Körpern	58
5.8	Weitere Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras	60
5.9	Meine Zusammenfassung	62

5 Flächenberechnungen

5.1 Einleitung

Wir beginnen mit der Frage, was es *heisst*, zu *messen* und stellen die kleinsten und grössten Einheiten zusammen.

Mit der *Herleitung der Flächenformeln einfacher, geradlinig begrenzter Figuren* werden wir in die Flächenberechnung einsteigen und dabei ein weiteres Mal (passiv) mit *GeoGebra* arbeiten.

Ausführlich werden wir uns mit den *Flächenverwandlungen* befassen, um einerseits die Bedeutung der *Abhängigkeiten* in den Flächenformeln zu zeigen und andererseits auch als Vorbereitung für den Beweis des *Kathetensatzes*. Abschliessen werden wir diesen Abschnitt mit dem *Ergänzungsparallelogramm*.

Es folgt *eine Herleitung der Satzgruppe des Pythagoras* und die klassischen Anwendungen der *Flächverwandlungen und des geometrischen Wurzelziehens*. Dabei werden wir von der passiven Verwendung von *GeoGebra* zu einer aktiven Anwendung in der Geometrie übergehen.

Die Wurzeln werden wir in diesem Skript auch noch algebraisch behandeln und zeigen, dass nicht alle Wurzeln rational sind. Für die Aufgaben greifen wir auf Quellen im Internet zurück.

Wir schliessen dieses Kapitel mit Anwendungen des *Pythagoras im Raum* unter Verwendung des *Normwürfels*. Damit können wir unser räumliches Vorstellungsvermögen weiter schulen und erhalten auch eine Möglichkeit, *GeoGebra im Raum* kennenzulernen.

Die im Skript verwendeten *ggb*-files sind, neben meiner homepage, auch im zugehörigen *GeoGebra-Buch* für einen download und eine online-Verwendung zu finden, unter

<https://www.geogebra.org/m/qturpfr>

Noch einige Bemerkungen zur Unterrichtsform:

Neben der klassischen Form des *gemeinsam entwickelnden Unterrichts*, also dem aktiven Austausch

Lehrer ↔ SchülerInnen

wird auch das selbständig-organisierte Lernen (*SOL*) unter euch gefordert und gefördert, also dem aktiven Austausch

SchülerInnen ↔ SchülerInnen

Ebenso stehen euch für diverse Herleitungen und Erläuterungen weitere Unterlagen in verschiedenen Formaten zur Verfügung:

pdf, *ggb* und *mp3*.

Ihr erhaltet somit auch eine Möglichkeit, weitere Unterrichts- und Medienformen kennenzulernen und herauszufinden, welche sich für euer Lernen am besten eignen.

Du arbeitest mit einer *Papierversion*, d.h. mit einer Version mit noch viel Platz zum Konstruieren im Skript.

Wir werden passiv schon auf die digitale Medien von *GeoGebra* zur Unterstützung zurückgreifen. Im Laufe des Unterrichts gehen wir dann zu einer aktiven Anwendung von *GeoGebra in der Geometrie* über.

5.2 Messen & Masse

Ein ganz wichtiger Begriff in der Mathematik und den Naturwissenschaften ist der Begriff des *Messens*.

Wir messen

- die Zeit,
- die Temperatur,
-
-
-
-
-

Doch was heisst *messen* überhaupt?

das hat zur Folge, dass die Angabe einer *gemessenen* (oder später auch berechneten) *Grösse*, die Angabe der verwendeten *Masseinheit* und der davon abhängigen *Masszahl* verlangt:

Die im Alltag verwendeten *Einheitsstrecken* sind

und wir können feststellen,

eine grössere Einheitsstrecke führt zu einer

eine kleinere Einheitsstrecke führt zu einer

Die heute verwendeten Masseinheiten stammen aus der Landvermessung und die Länge des *Urmeters* wurde am 7. April 1795 von der französischen Nationalversammlung beschlossen:

Kleinere Einheiten werden vom Urmeter abgeleitet:

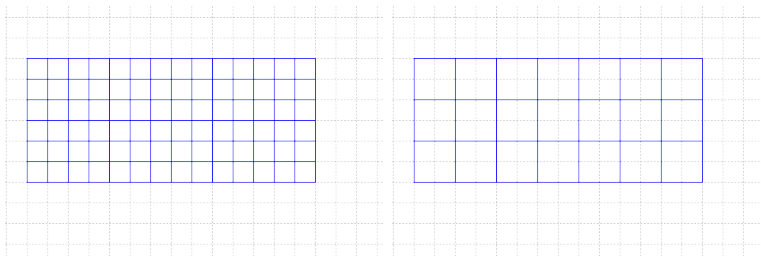
Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung	führt auf ...
Dezi	d		
Zenti			

und ebenso unsere grösseren Einheiten:

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung	führt auf ...
Deka	da		
Hekto			

Wie werden nun Flächen *gemessen* ?

Leicht lässt sich erkennen, dass für die Berechnung des Flächeninhaltes eine Rechtecks mit den Seitenlängen a und b folgendes gilt:



und für das Quadrat folgt:

Geometrie-Aufgaben: Flächenberechnungen 1
(Zugehörige Lösungen)

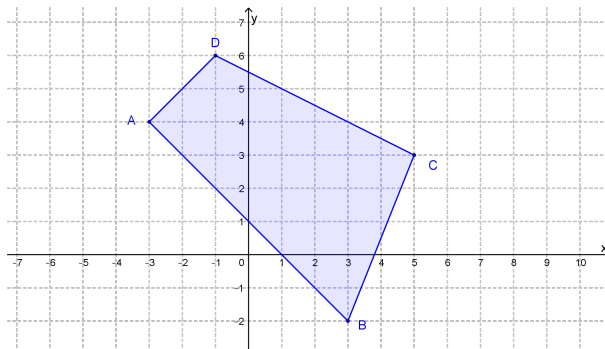
5.3 Flächeninhalt einfacher Figuren

Wir werden insbesondere die folgenden (schon bekannten) Eigenschaften verwenden:

- Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit ...
- Kongruente Figuren haben ...
- Der Flächeninhalt einer (geometrischen) Figur ist ...

und beginnen mit folgendem Beispiel:

Beispiel 5.1 Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte und überlege dir einen Weg, um den Flächeninhalt des folgenden Vierecks zu bestimmen:



5.3.1 Die Flächenformeln einfacher geometrischer Figuren - ein Gruppen SOL-Projekt mit Lernaufgaben

Die *Ziele* dieses *SOL-Projektes* sind die Herleitung von *Flächenformeln* mit Hilfe von *Lernaufgaben*. Diese sind jeweils mit Informationen aus dem Internet, *GeoGebra* und natürlich eigener Phantasie zu lösen. Die mathematische Idee zur Herleitung der Formeln ist eigentlich immer die Gleiche:

Die Umformung der zu untersuchenden Figur auf eine zu ihr kongruente Figur, dessen Flächeninhalt ihr schon bestimmen könnt.

Arbeitet selbständig, in max 3er-Gruppen. Wenn ihr keine Idee für eine Flächenformel habt, stehen euch auf meiner homepage die schon mehrfach angesprochenen *ggb*-, *pdf*- und *mp4-files* zur Verfügung.

Die *ggb*-files sind auch online auf www.geogebra.org zu finden, direkt unter www.geogebra.org/m/qturpfr.

Eure Zusammenfassung der geometrischen Eigenschaften, der Flächenformeln und insbesondere eurer Fragen behandeln wir gemeinsam in der Klasse, *nach* der Herleitung der Trapezformel.

5.3.2 Der Rhombus

Aufgaben 5.1 *Definiere, was ein Rhombus ist:*

Aufgaben 5.2 *Konstruiere den Rhombus ABCD mit der Seitenlänge $s = 5\text{cm}$ und dem Winkel $\alpha = 55^\circ$ in der Ecke von A. Zeichne die Diagonalen ein, was fällt auf. Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Rhombus zusammen und überlege die Herleitung einer möglichen Formel zur Berechnung der Fläche.*

Für eine Herleitung der Flächenformel stehen euch die folgenden *files* in verschiedenen Formaten zur Verfügung:

[RhombusFläche - *ggb*](#)
[RhombusFläche - *pdf*](#)
[RhombusFläche - *mp4*](#)

Beachtet bitte:

Ihr braucht nicht alle zu verwenden, wählt das Medium aus, welches euer Lernen am besten unterstützt.

Diese *files* sind zu erreichen

- durch das Anklicken in der pdf-Version des Skriptes,
- auf meiner homepage, unter [dem Kapitel 5, der Geometrie für das UG](#).
- Nur die *ggb*-files sind noch online auf www.geogebra.org zu finden, direkt unter www.geogebra.org/m/qturpfr.

Das gilt natürlich auch für die files der noch folgenden Figuren.

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Rhombus ist ...

5.3.3 Das Parallelogramm

Aufgaben 5.3 *Definiere, was ein Parallelogramm ist:*

Aufgaben 5.4 *Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ mit den Seiten $a = \overline{AB} = 6\text{cm}$ und $b = \overline{BC} = 3\text{cm}$ und dem Winkel $\alpha = 35^\circ$ in der Ecke A .
Zeichne die Diagonalen ein, fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Parallelogramms zusammen und überlege eine mögliche Herleitung einer Flächenformel.*

Für eine Herleitung der Flächenformel stehen euch wieder die folgenden *files* zur Verfügung:

[PGFläche - ggb](#)
[PGFläche - pdf](#)
[PGFläche - mp4](#)

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist ...

5.3.4 Das Dreieck

Für die Herleitung der Formel zur Berechnung des zugehörigen Flächeninhalts stehen euch die folgenden *files* zur Verfügung:

[DreiecksFläche - ggb](#)
[DreiecksFläche - pdf](#)
[DreiecksFläche - mp4](#)

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist ...

Aufgaben 5.5

1. Überlege dir, ob auch die folgenden Formeln gelten:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b$$

2. Leite die Formel $A_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}$ zur Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC selber her:

Aufgaben 5.6 *Konstruiere das Dreieck ΔABC ,*

mit $c = 7\text{cm}$, $\alpha = 50^\circ$ und $\omega_\alpha = 5\text{cm}$.

Messe die notwendigen Grössen, damit du den Flächeninhalt berechnen kannst. Berechne ihn und vergleiche dein Resultat mit deinen Klassenkameraden.

5.3.5 Das Trapez

Aufgaben 5.7 *Definiere, was ein Trapez ist:*

Aufgaben 5.8 *Konstruiere das Trapez $ABCD$ mit den Seiten $a = \overline{AB} = 5\text{cm}$, dem Winkel $\beta = 45^\circ$ in der Ecke B , $c = \overline{BC} = 6.5\text{cm}$ und der Mittellinie $m = 6\text{cm}$
Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Trapezes zusammen und überlege die Herleitung einer möglichen Formel zur Berechnung der Fläche.*

Für eine selbständige Nachbearbeitung stehen euch die folgenden *files* zur Verfügung:

[TrapezFläche - ggb](#)
[TrapezFläche - pdf](#)
[TrapezFläche - mp4](#)

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist ...

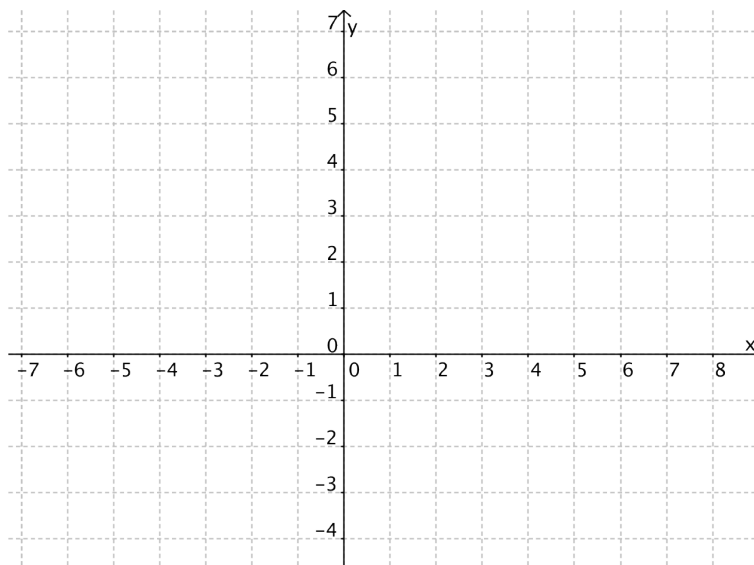
Abschliessend nun noch die angesprochen Diskussion eurer Lösungen und Fragen im Plenum:

5.3.6 Beliebige, geradlinig begrenzte Vielecke

Von ganz grosser Bedeutung in der Geometrie ist das Dreieck, da sich jede geradlinig begrenzte Figur in Dreiecke zerlegen lässt (die sog.). Wenn wir nun die Berechnungen in einem Dreieck durchführen können, so können wir durch Summen- oder Differenzbildungen auch Berechnungen in einem beliebigen Vieleck durchführen, wenn wir dieses in Dreiecke (oder andere uns bekannte Figuren) zerlegen.

Aufgaben 5.9 Berechne den Flächeninhalt im Viereck $ABCD$, mit

$$A = (-3/4), B = (3/ - 2), C = (5/3) \text{ und } D = (-1/6)$$



Geometrie-Aufgaben: Flächenberechnungen 2
(Zugehörige Lösungen)

5.4 Flächenverwandlungen

Bei *Flächenverwandlungen* geht es nun darum

- die Form einer geometrischen Figur zu ändern
und dabei
- den Flächeninhalt beizubehalten.

Um die *Flächengleichheit* erhalten zu können müssen wir die Flächenformeln und deren Abhängigkeiten kennen:

Wir beginnen *im Dreieck*:

Die Dreiecksfläche $A_{\Delta ABC}$ berechnet sich mittels

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

oder allgemein: Grundseite \cdot zugehörige Höhe : 2

das heisst,

dass der Flächeninhalt von der Länge der Grundseite und der Länge der zugehörigen Höhe abhängig ist;

und bedeutet,

dass wenn wir die Länge der Grundseite und die Länge der zugehörigen Höhe beibehalten, wir den gleichen Flächeninhalt haben.

Für die Aufgaben und Beispiele stehen euch jeweils *ggb*-files auf der meiner [homepage](#) zur Verfügung, mit den folgenden Namen und Bezeichnungen:

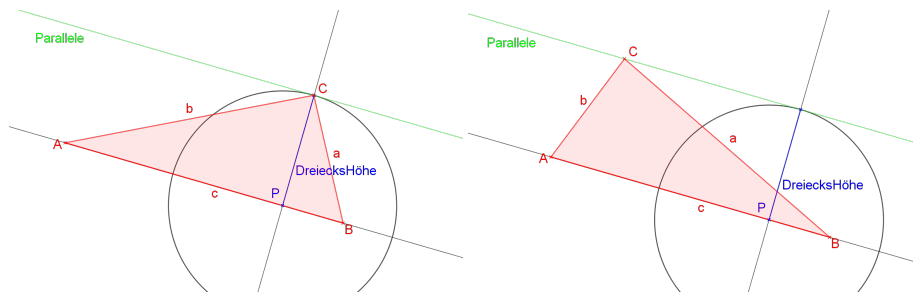
Dreieck, Trapez, Grundaufgaben A - C, Heureka
Aufgabenvorlagen für das 5-Eck, für die Summenfläche

oder ebenfalls online unter www.geogebra.org/m/qturpfr

Wir beginnen mit dem *GeoGebra*-file *Dreieck*:

Beispiel 5.2 Schaffe dir einen Zugang zum *ggb*-file und öffne es ...

1. Mach nun den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und die Grösse der Höhe in der graphischen Darstellung sichtbar.
2. Verschiebe den Punkt C entlang der Parallelen zur Grundseite c .

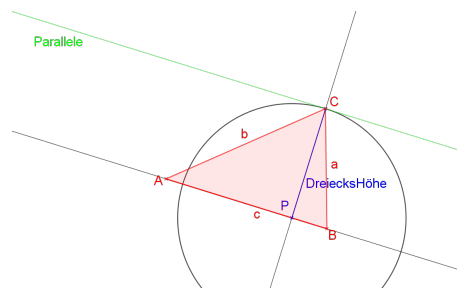


3. Beachte dabei die Anzeige des Flächeninhaltes

- (a) Was fällt auf ?
- (b) Erkläre.

4. Verschiebe nun den Punkt B und beachte dabei wieder die Anzeige des Flächeninhaltes ...

- (a) Was fällt auf ?
- (b) Erkläre.



Aufgaben 5.10 Die gleichen Überlegungen zum Parallelogramm:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms $APG ABCD$ berechnet sich mittels folgender Formel:

oder allgemein: ...

das heisst,

dass der Flächeninhalt abhängig ist von: ...

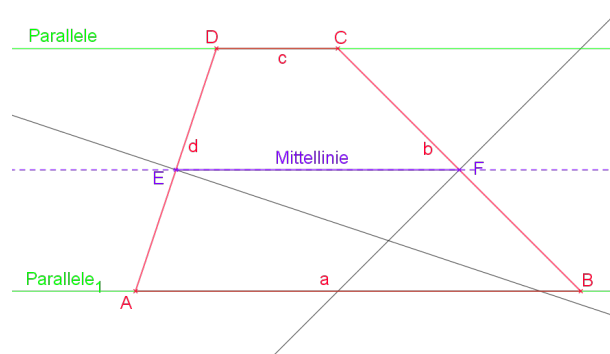
und bedeutet,

dass ...

Aufgaben 5.11 Der Flächeninhalt eines Trapezes ist abhängig von ...

Wir verwenden das *GeoGebra*-file *Trapez*:

1. Schaffe dir einen Zugang zum *ggb*-file und öffne es.
2. Mach den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ in der graphischen Darstellung sichtbar.
3. Konstruiere nun zwei weitere Trapeze mit dem gleichen Flächeninhalt.

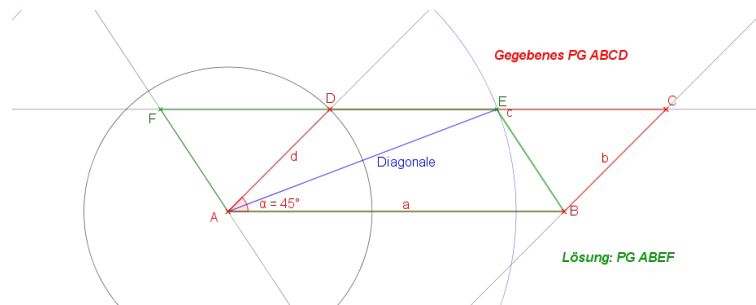


5.4.1 Grundaufgaben

Wir wollen die folgenden klassischen Aufgaben mit Hilfe von *GeoGebra*-files untersuchen:

- Aufgaben 5.12**
- Lies die folgenden Aufgaben durch,
 - verschaffe dir einen Zugang zu den zugehörigen ggb-files *Grundaufgaben A, B, C* und arbeite die Lösung durch:
 - Notiere deine Bemerkungen im Skript,
 - notiere deine Fragen auf Google Drive in den F&A-Dokumenten,
 - beantworte die Fragen deiner MitschülerInnen in den F&A-Dokumenten.
 - Unbeantwortete Fragen werden wir im Klassenverband behandeln.

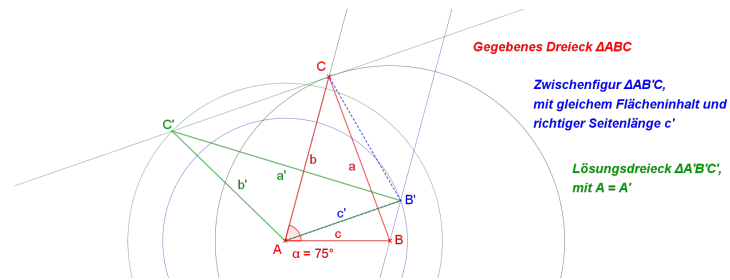
1. Verwandle das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 7\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$ und $\alpha = 45^\circ$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit der Diagonalen $e' = 6\text{cm}$.



(Grundaufgabe A)

Meine Bemerkungen ...

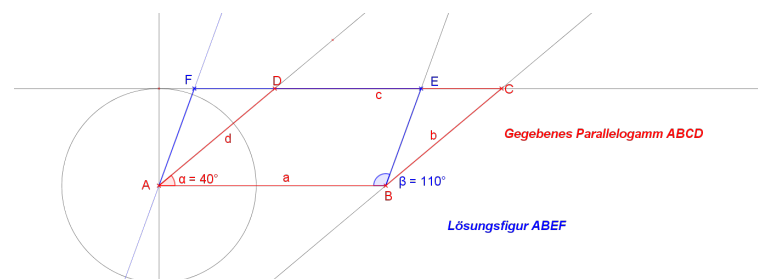
2. Verwandle das Dreieck $\triangle ABC$ mit $c = 6\text{cm}$, $\alpha = 75^\circ$ und $a = 10\text{cm}$ in ein flächengleiches Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit $c' = 7\text{cm}$ und $b' = 9\text{cm}$.



(Grundaufgabe B)

Meine Bemerkungen ...

3. Verwandle das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 7\text{cm}$, $h_a = 3\text{cm}$ und $\alpha = 40^\circ$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit $\beta' = 110^\circ$.

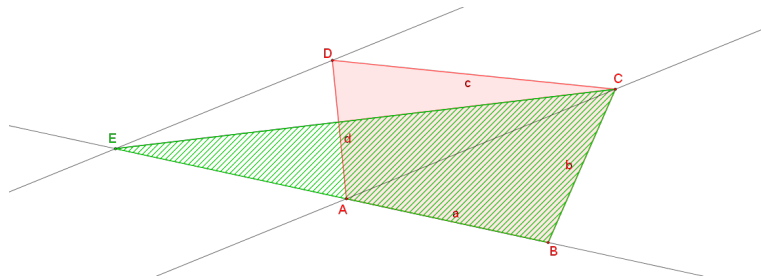


(Grundaufgabe C)

Meine Bemerkungen ...

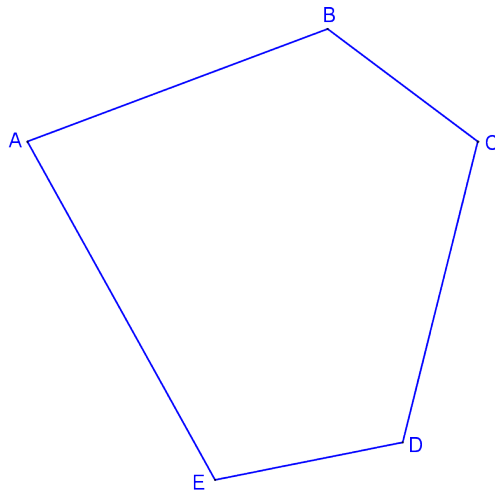
Und noch etwas zum Nachdenken:

Aufgaben 5.13 *Warum sind die Flächeninhalte des Rechtecks $ABCD$ und des Dreiecks $\triangle EBC$ gleich:*



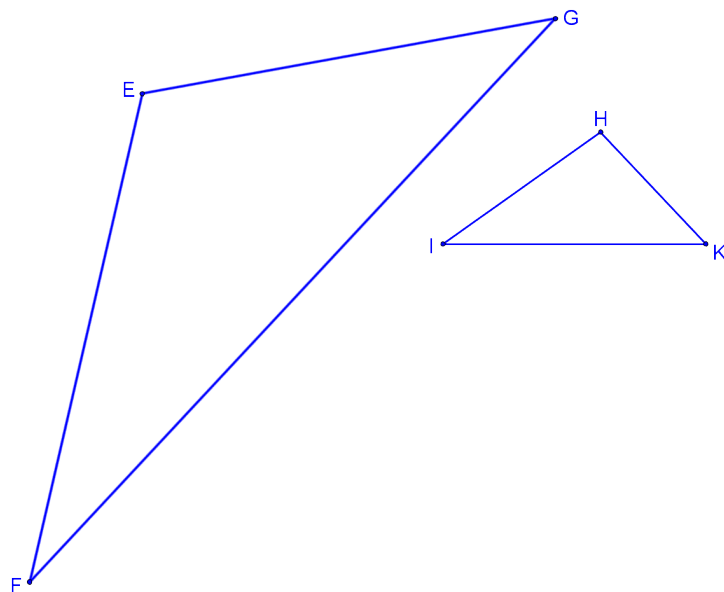
Heureka !

Aufgaben 5.14 *Verwandle das Fünfeck $ABCDE$ in ein flächengleiches Parallelogramm:*



Aufgaben 5.15 *Konstruiere ein Rechteck ABCD für welches gilt:*

$$A_{ABCD} = A_{\triangle EFG} - A_{\triangle HIK}$$



Die Idee:

Aufgrund des offensichtlich immer grösser werdenden Aufwandes beim Konstruieren, wollen wir nun vermehrt *GeoGebra* auch aktiv zur Anwendung bringen:

Aufgaben 5.16 *Führe deine Überlegungen zur Summe zweier Flächen an einem eigenen Beispiel durch.
Skizziere die Ausführung (inkl. Lösungsbericht)*

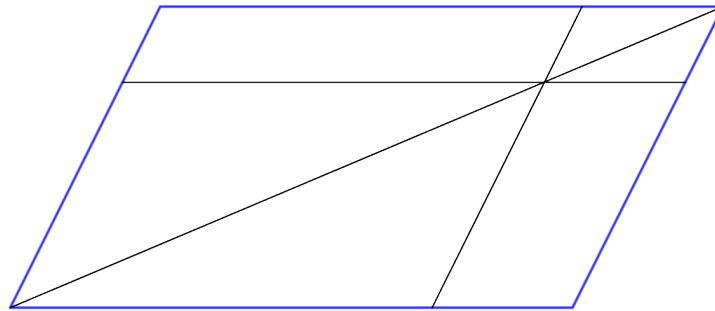
Aufgaben 5.17 *Gebe dir zwei unterschiedlich grosse Dreiecke Δ_1 und Δ_2 vor, mit $A_{\Delta_1} > A_{\Delta_2}$.
Konstruiere ein Dreieck Δ_3 mit der Eigenschaft: $A_{\Delta_3} = A_{\Delta_1} - A_{\Delta_2}$*

Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 3*
(Zugehörige Lösungen)

Geometrie-Aufgaben: *Grundaufgaben Scherungen*
(Zugehörige Lösungen)

5.4.2 Ergänzungsp parallelogramme

Wir betrachten die folgende Ausgangssituation:



Aufgaben 5.18 *Messe die Strecken (soweit notwendig) und berechne die Flächeninhalte aller Teilfiguren,*

Kontrolliere deine Resultate mit Hilfe von *GeoGebra*.

Aufgaben 5.19 *Bereite wieder die folgenden Grundaufgaben vor:*

1. *Verwandle ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 6\text{cm}$, $h_a = 2\text{cm}$ und $\alpha = 40^\circ$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit $a' = 2.5\text{cm}$.*

2. *Verwandle ein Quadrat mit $A = 16\text{cm}^2$ in ein flächengleiches Rechteck mit $a = 7\text{cm}$.*

3. *Löse:*

Geometrie-Aufgaben: Zusatzaufgaben
(Zugehörige Lösungen)

5.5 Die Satzgruppe des Pythagoras

Zur *Satzgruppe des Pythagoras* gehören wichtige Aussagen zu Flächenbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck, aufbauend aus geschickten Flächenverwandlungen.

Wir beginnen mit den Grundbegriffen:

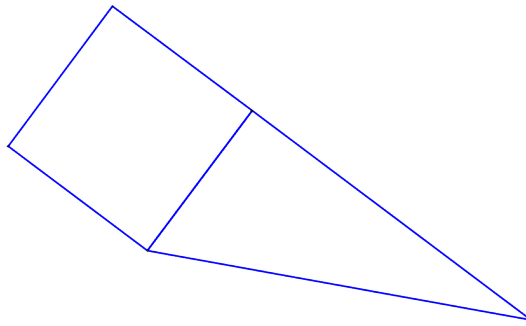
5.5.1 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

5.5.2 Der Satz des Euklid (der Kathetensatz)

In jedem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt

mathematisch kurz:

geometrisch betrachtet:



Aufgaben 5.20 *Leite den Kathetensatz mit Hilfe der Kathete a her.*

Aufgaben 5.21 *Klassische Anwendung:*
Verwandle ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.

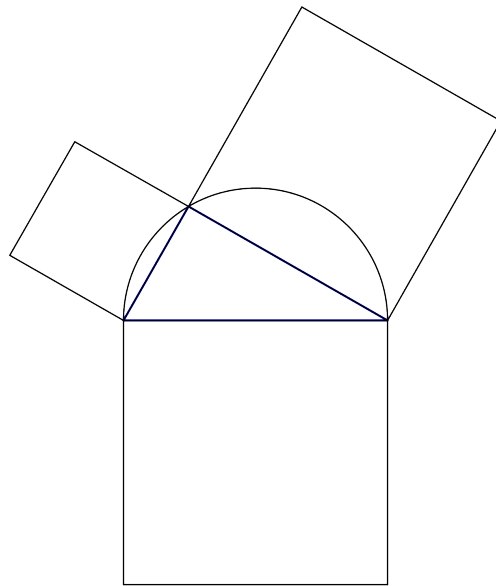
Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 4*
(Zugehörige Lösungen)

5.5.3 Der Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ausgedeutet:

geometrisch betrachtet:



Aufgaben 5.22 *Suche im Internet nach einer alternativen Herleitung des Satzes des Pythagoras.*

Beispiel 5.3 Konstruiere die Quadrate \square_1 und \square_2 mit $A_{\square_1} = 10\text{cm}^2$ und $A_{\square_2} = 25\text{cm}^2$.

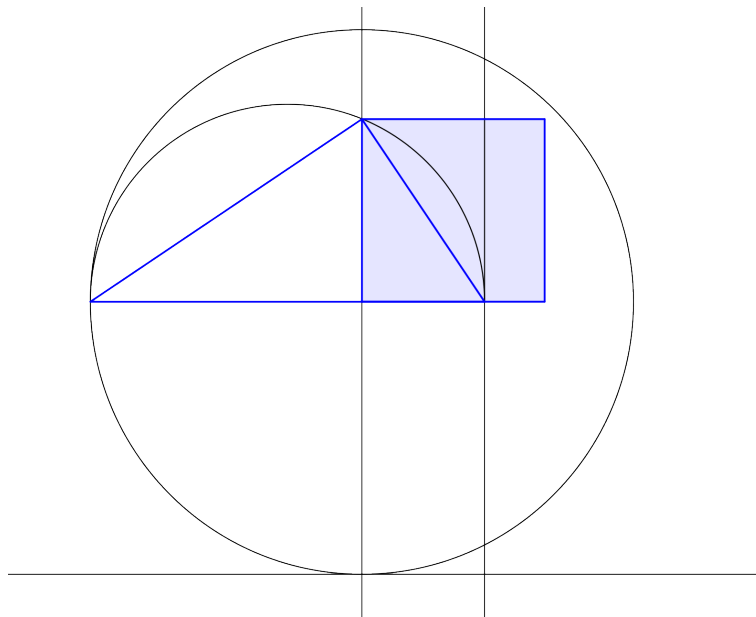
Konstruiere nun das Quadrat \square_3 mit der Eigenschaft, dass $A_{\square_3} = A_{\square_1} + A_{\square_2}$ und bestimme des Seitenlänge.

Aufgaben 5.23 Gegeben sind die Quadrate \square_4 , \square_5 und \square_6 mit $A_{\square_4} = 36\text{cm}^2$, $A_{\square_5} = 6.25\text{cm}^2$ und $A_{\square_6} = 1\text{cm}^2$.
Bestimme konstruktiv die Seitenlänge des Quadrates Q mit dem Flächeninhalt $A_Q = A_{\square_4} + A_{\square_5} - A_{\square_6}$.

5.5.4 Der Höhensatz

Herleitung:

geometrisch betrachtet:



ausgedeutet:

mathematisch kurz:

Aufgaben 5.24 *Leite den Höhensatz mit Hilfe der Kathete b her.*

5.5.5 Eine *SOL-Klassenarbeit* zu Anwendungen der Flächenverwandlungen

Aufgaben 5.25 *Die folgenden weiteren klassischen Anwendungen werden wir in der Form einer*

SOL - Klassenarbeit

durchführen:

- *Ihr bekommt den Link zu einer EXCEL-Tabelle, auf welcher alle Aufgabennummern aufgeführt sind,*
- *es Platz hat für eure Namen,*
- *die ihr in den Zeilen der von euch gelösten Aufgaben eintragen könnt,*
- *und mit einem Link zu eurer ggb-Lösung versehen sollt.*

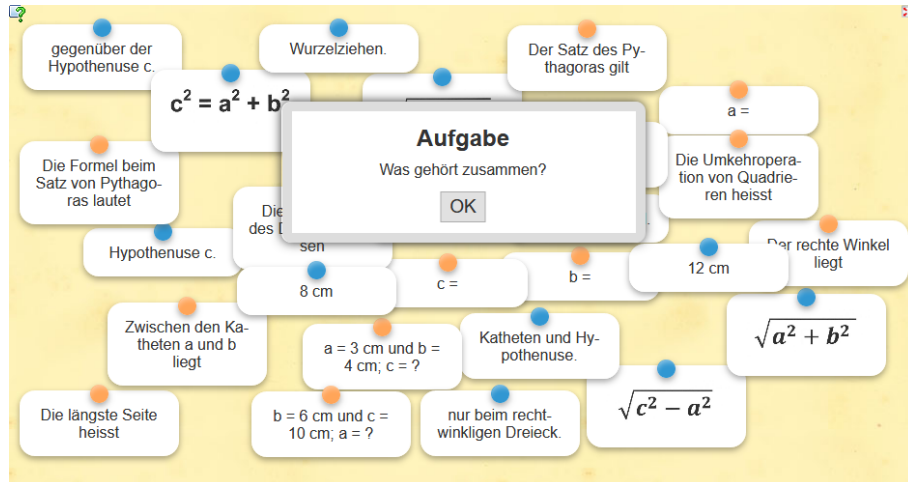
1. *Verwandle mit Hilfe des Höhensatzes ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.*
2. *Verwandle mit Hilfe des Kathetensatzes ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.*
3. *Verwandle ein Dreieck in ein flächengleiches Quadrat.*
4. *Stelle die Summe einer Dreiecksfläche und einer Quadratfläche durch ein Quadrat dar.*

5. Stelle die Summe zweier Rechtecksflächen durch eine Quadratfläche dar.
6. Verwandle ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 49 in ein flächengleiches Rechteck mit einer Seitenlänge von 8.
- mit Hilfe des Kathetensatzes.
 - mit Hilfe des Höhensatzes.
7. Verwandle ein beliebiges konkaves Viereck mit einem Flächeninhalt ≥ 30 in ein flächengleiches Dreieck, mit einer Grundseitenlänge 7.
8. Gebe dir ein beliebiges Rechteck $ABCD$ vor:
- Verwandle das Rechteck mit Hilfe des Kathetensatzes in ein Quadrat.
 - Verwandle das Rechteck mit Hilfe des Höhensatzes in ein Quadrat.
9. Gebe dir zwei beliebige Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ mit $A_{ABCD} > A_{EFGH}$ vor.
Konstruiere eine Quadrat $RSTU$, so dass gilt:
- $A_{RSTZ} = A_{ABCD} + A_{EFGH}$
 - $A_{RSTZ} = A_{ABCD} - A_{EFGH}$
10. Gebe dir ein beliebiges Rechteck $ABCD$ mit $A_{ABCD} > 20$ vor.
Verwandle das Rechteck in eine flächengleiches Rechteck $EFGH$ mit einer vorgegeben Seitenlänge von 6.
(Hinweis: Verwandle zuerst in ein Quadrat und anschliessend in ein Rechteck)

Wir schliessen diese Aufgabe am ...

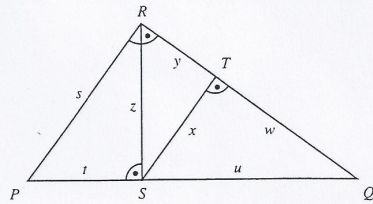
Aufgaben 5.26 *Noch einige Aufgaben aus dem Internet:*

- ein Quiz: <https://learningapps.org/1169689>



- erste Aufgaben: <http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Pythagoras/Block1/Aufgaben.htm>

Berechne mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:	
Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten mit den Längen $a=5$ cm und $c=15$ cm. Berechne die Länge der Hypotenuse. Lösung	Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine 12 cm lange Basis und 8 cm lange Schenkel. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks! Lösung
Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks mit den Seitenlängen 5 cm und 7 cm? Lösung	In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Flächeninhalt 12 cm^2 ist die Basis 6 cm lang. Berechne die Länge der Schenkel! Lösung
In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Länge der Basis 8 cm und die Höhe ist 4 cm lang. Wie lang sind die beiden Schenkel? Lösung	Ein Kreis mit dem Radius 4 cm hat eine Sehne der Länge 5 cm. Welchen Abstand hat die Sehne vom Kreismittelpunkt? Lösung
In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Länge der Basis 3,5 cm. Jeder Schenkel ist 4 cm lang. Berechne die Länge der Höhe zur Basis! Lösung	Ein Quadrat hat eine Seitenlänge von 12 cm. Wie lang ist die Diagonale? Lösung



Abkürzungen:

P: Satz des Pythagoras

H: Höhensatz

K: Kathetensatz

Beispiel:

$$u^2 = w^2 + \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$1. \quad u^2 = w \cdot \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$2. \quad u = z^2 : \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$3. \quad u = \sqrt{\boxed{} - z^2} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$4. \quad x^2 = \boxed{} - y^2 \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$5. \quad x^2 = \boxed{} \cdot y \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$6. \quad y = z^2 : \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$7. \quad y = \sqrt{z^2 - \boxed{}} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$8. \quad y = \boxed{} : w \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$9. \quad s^2 = \boxed{} + z^2 \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

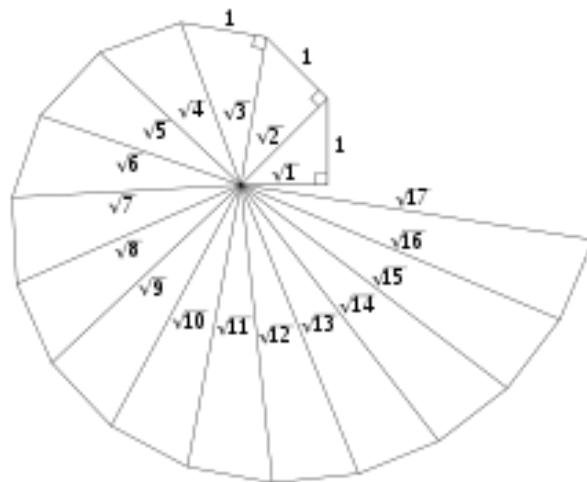
$$10. \quad s^2 = (t + u)^2 - \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$11. \quad s^2 = t \cdot \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$12. \quad w = z^2 : \boxed{} - y \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$13. \quad w = \sqrt{(u + t) \cdot \boxed{}} - y \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

5.5.6 Geometrisches Wurzelziehen



Aufgaben 5.27 *Konstruiere $\sqrt{2}, \sqrt{20}$ und $\sqrt{8}$*

Aufgaben 5.28 *Konstruiere $\sqrt{24}$ in möglichst wenigen Schritten mit*

- 1. dem Satz des Pythagoras,*
- 2. dem Höhensatz,*
- 3. dem Kathetensatz.*

5.5.7 Die Algebra der Wurzel

- *die Grundlagen, Definitionen*

- *Wurzelziehen mit dem Taschenrechner*

- *die Rechengesetze*

Beispiel 5.4

- $\sqrt{9+16} =$
- $\sqrt{9} + \sqrt{16} =$

- $\sqrt{16-9} =$
- $\sqrt{16} - \sqrt{9} =$

- $\sqrt{16 \cdot 9} =$
- $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} =$

- $\sqrt{16 : 9} =$
- $\sqrt{16} : \sqrt{9} =$

- *partielles Wurzelziehen*

Beispiel 5.5

- $\sqrt{12} =$

- $\sqrt{300} =$

- $\sqrt{128} =$

- $\sqrt{20x^2y^2} =$

- $\sqrt{400x^2y^4z^5} =$

- $\sqrt{50ab^2c^3} =$

- $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} =$

Längerfristig und nachhaltig werden wir uns nun noch mit den folgenden Aufgaben aus dem www auseinandersetzen:

- Eine Auswahl von Aufgaben aus Meinolf Müllers homepage *Fit in Mathe Online* :
 - [zur Auswahl ...](#)
 - [zu seiner homepage ...](#)
- Aufgaben mit Lösungen, deren Quellen verloren gingen:
 - [Aufgaben 1](#)
 - [Aufgaben 2](#)

und für die Nachhaltigkeit:

Meine Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse aus dem Lösen und Diskutieren der Aufgaben:

5.5.8 Wurzelziehen von Hand

5.5.9 Die Menge der reellen Zahlen

Konstruiere zur Vorbereitung $\sqrt{2}$:

5.5.10 Pythagoras in speziellen geometrischen Figuren

- im gleichseitigen Dreieck:

- im Quadrat:

Aus dem *www* ...

- weitere Aufgaben, aus www.matheaufgaben-loesen.de/
- Theorieunterlagen von *Andi Rüz*

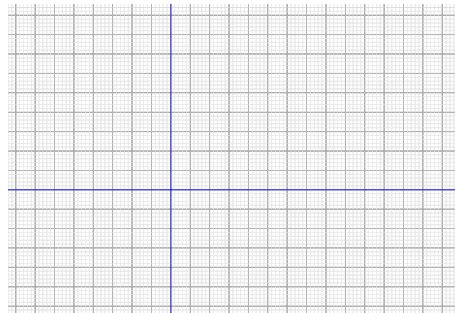
5.6 Pythagoras im Raum

5.6.1 Koordinatensysteme im \mathbb{R}^3

Wir repetieren im \mathbb{R}^2 :

Aufgaben 5.29 *Zeiche die folgenden Punkte ein:*

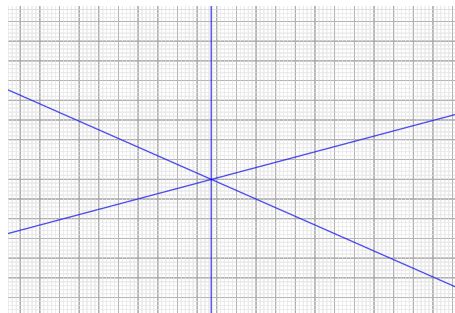
$$A = (1/2), B = (5/2), C = (-3/4), D = (0/-3), E = (4/0), F = (-2/-3)$$



Für die Darstellung eines *Koordinatensystems* sind die folgenden Punkte unabdingbar:

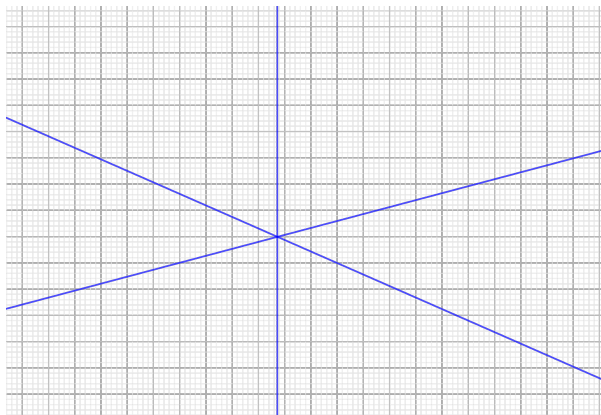
-
-
-
-

Das gilt natürlich auch im Raum, im 3-dimensionalen Raum \mathbb{R}^3 :



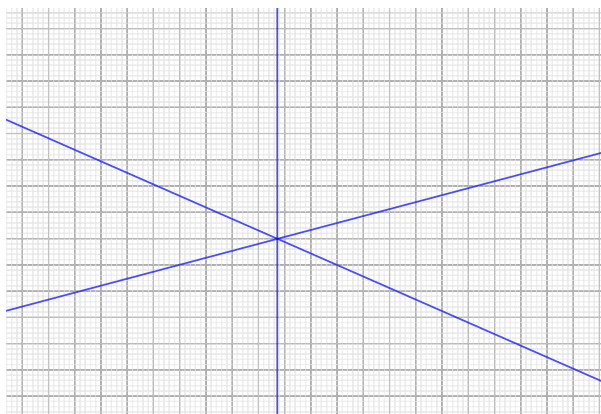
Beispiel 5.6 Zeichne die folgenden Punkte ein:

- $A = (2/0/0)$
- $B = (0/3/0)$
- $C = (0/0/-2)$
- $D = (-3/0/0)$



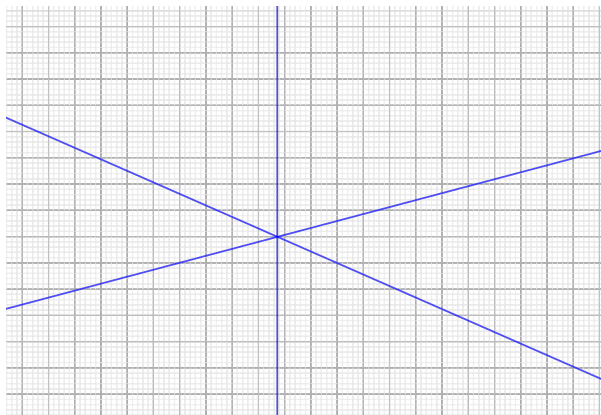
Aufgaben 5.30 Zeichne die folgenden Punkte ein:

- $A = (2/3/0)$
- $B = (0/3/4)$
- $C = (2/0/4)$
- $D = (0/2/-4)$
- $E = (-2/-1/0)$

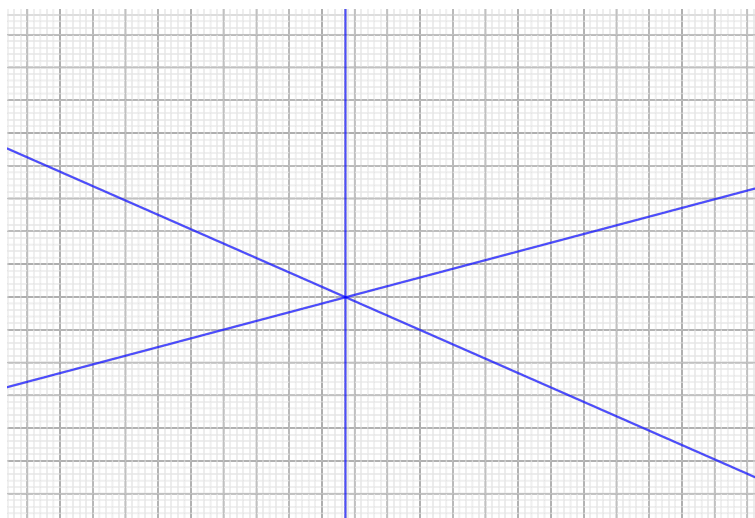


Aufgaben 5.31 Zeichne die folgenden Punkte ein:

- $A = (1/2/3)$
- $B = (3/5/ - 1)$
- $C = (3/ - 1/5)$
- $D = (-1/ - 2/3)$



Aufgaben 5.32 Zeichne alle 6 verschiedenen Wege ein, um vom Ursprung zum Punkt $P(2/4/6)$ zu kommen:

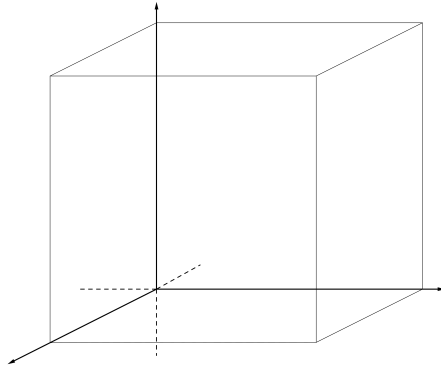


und bestimme den Abstand von P zum Ursprung:

5.6.2 Koordinatensysteme im \mathbb{R}^3 - mit *GeoGebra*

in Arbeit ...

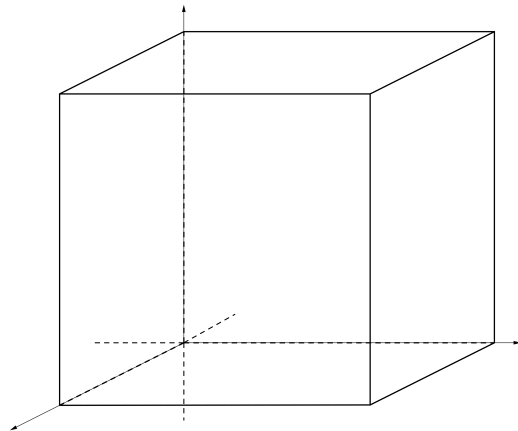
5.6.3 Der Normwürfel



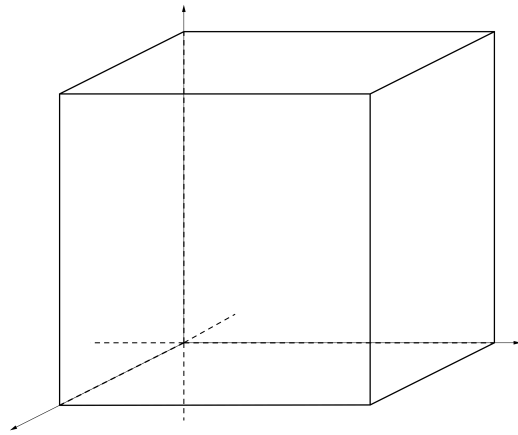
- Kennenlernen des Normwürfels:
 - Markiere alle sichtbaren/ nicht-sichtbaren Kanten,
 - Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte,
 - Zeichne alle rechten Winkel ein,
 - und immer zuerst ...

- Zeichne die folgenden Punkte ein:

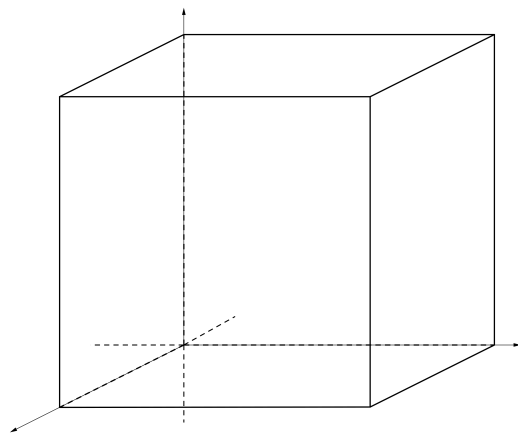
- $A = (0.5/0/0)$
- $B = (0/1/0.25)$
- $C = (1/0.5/1)$
- $D = (0.25/0.5/1)$
- $E = (0.8/0.8/0.8)$



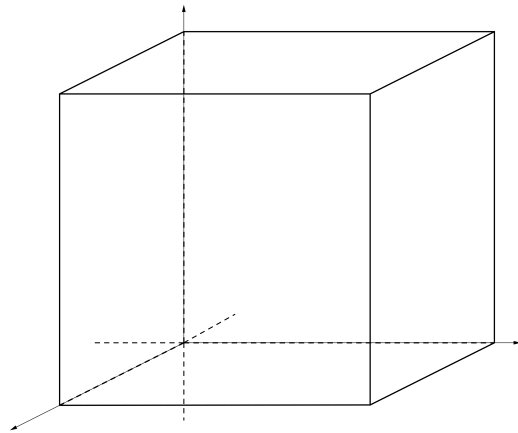
- Bestimme die Koordinaten eines Punktes
 - in der Grundfläche,
 - in der Deckfläche,
 - in der xz -Ebene,
 - in der yz -Ebene,
 - innerhalb des Würfels,
 - ausserhalb des Würfels.



- Zeichne die Diagonalen
 - in der Grundfläche ein,
 - in der rechten Seitenfläche ein,
 - in der hinteren Seite ein,
 - und alle dadurch entstandenen
 - 45° - Winkel,
 - 90° - Winkel.



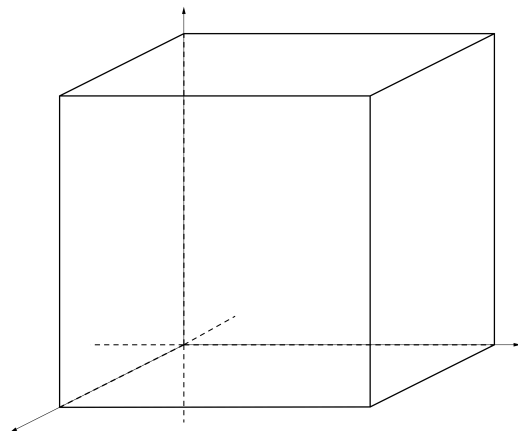
- Zeichne ein Dreieck ein, das sicher rechtwinklig ist:
 - In der Deckfläche,
 - in der linken Seitenfläche,
 - in der Frontseite.



Aufgaben 5.33 1. Teil:

*Löse unter den folgenden Punkten jeweils nur die ersten beiden Aufgaben und gehe dann weiter zum nächsten Punkt.
Die $\sqrt{\quad}$ - Werte sind exakt anzugeben.*

- Zeichne die folgenden Punkte ein
 - $A = (1/0/0)$ $B = (0/1/0)$
 - $C = (1/1/0.5)$ $D = (0.8/1/1)$
 und berechne die Länge folgender Strecken:
 - \overline{AB}
 - \overline{AC}
 - \overline{CD}
 - \overline{DB}



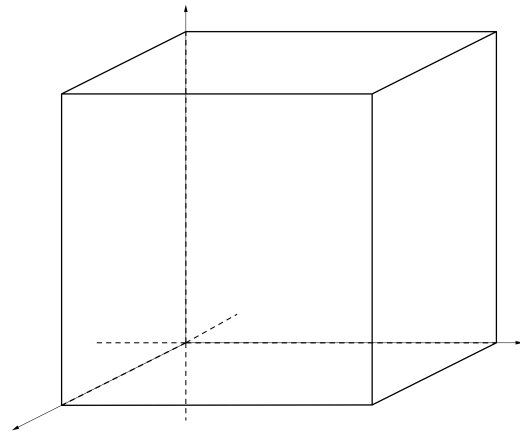
- Zeichne die folgenden Punkte ein

$$A = (1/0/0) \quad B = (1/1/0)$$

$$C = (0.8/0/0) \quad D = (0.5/1/0.2)$$

$$E = (1/1/1) \quad F = (0/0/1)$$

und berechne die Länge folgender Strecken:



○ \overline{BD}

○ \overline{BF}

○ \overline{CF}

○ \overline{CE}

○ \overline{AD}

Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle ABC$

- Zeichne die folgenden Punkte ein

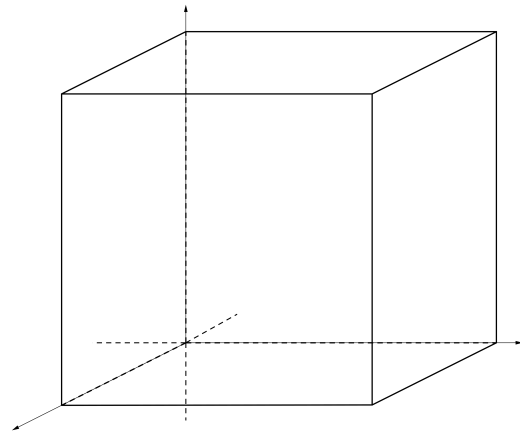
$$A = (1/0/0) \quad B = (1/1/0)$$

$$C = (0/0/0) \quad D = (0/1/0)$$

$$E = (1/0/1) \quad F = (1/1/1)$$

$$G = (0/0.738/1) \quad I = (0/1/0.8)$$

und berechne den Inhalt folgender
Dreiecke:



- ΔACE

- ΔCBF

- ΔBDI

- ΔADI

- ΔEFG

Aufgaben 5.34 2. Teil

*Berechne deine Wurzelwerte der obigen Aufgaben mit dem TR und kontrolliere mit GeoGebra.
Löse den Rest der Aufgaben.*

Aufgaben 5.35 *Zeichne die folgenden Punkte ein*

$$A = (1/0/0) \quad B = (1/1/0)$$

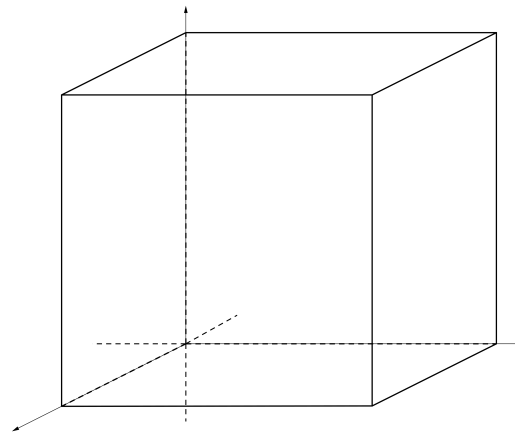
$$C = (0/1/1) \quad D = (1/0/0.4)$$

$$E = (1/1/0.4) \quad F = (0/1/0.8)$$

$$G = (0/0/0.8)$$

und berechne den Inhalt & Umfang folgender Flächen:

- ABC
- $DEFG$



Aufgaben 5.36 Zeichne die folgenden Punkte ein:

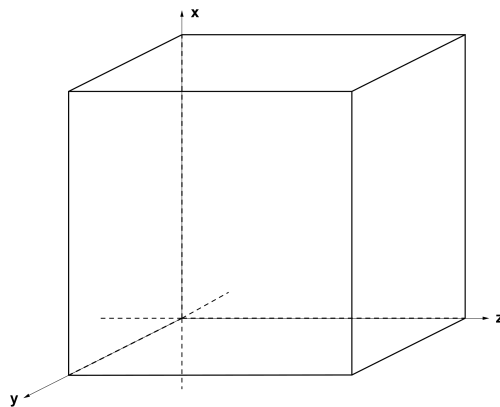
$$A = (0/1/0) \quad B = (0/0.6/1)$$

$$C = (0.4/0.6/1) \quad D = (0.4/0.6/0)$$

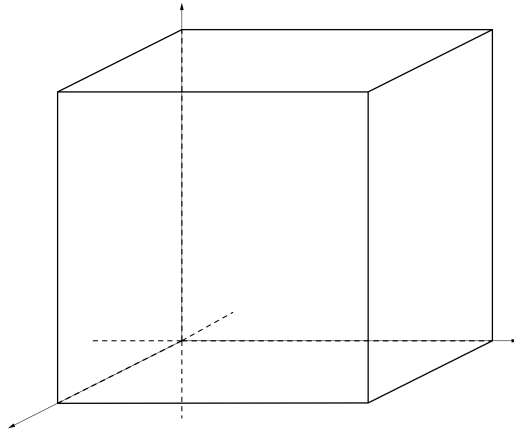
$$E = (1/0.6/0.3)$$

und berechne den Umfang, Inhalt und die Höhen der folgenden Dreiecke auf 3 Kommastellen genau:

- $\triangle ABC$
- $\triangle DCE$

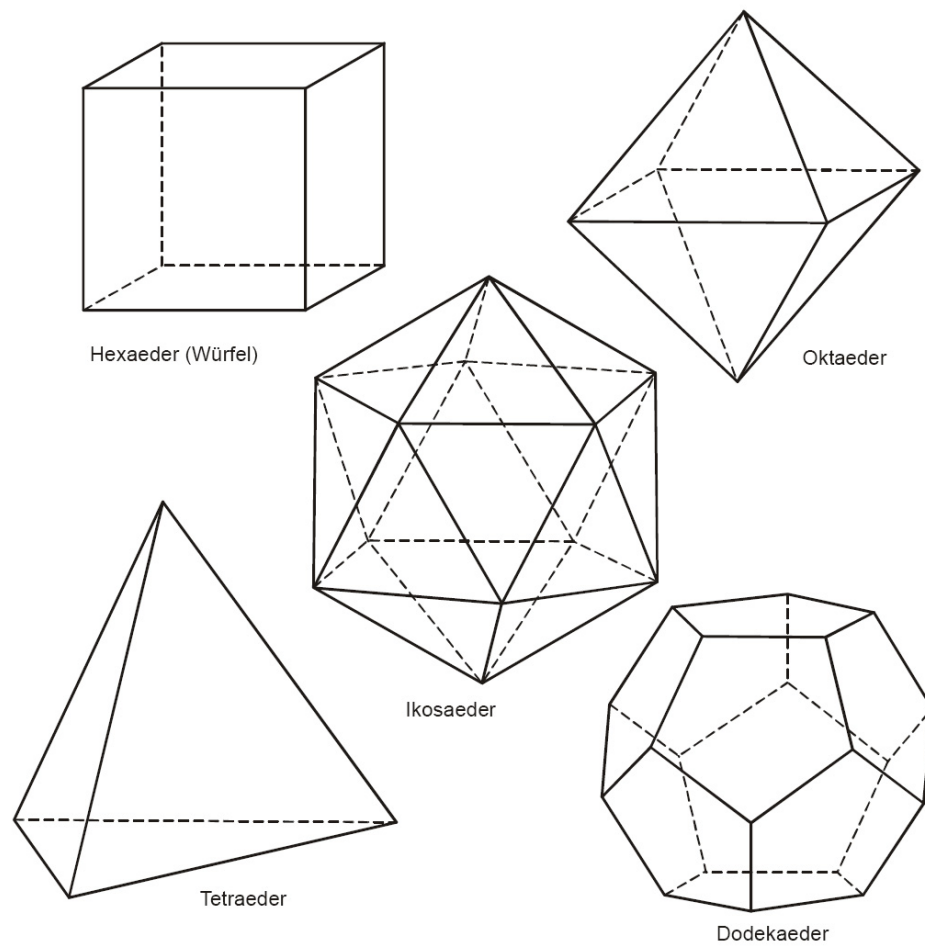


Aufgaben 5.37 *Formuliere mit deinem Banknachbarn eine eigene Aufgabe, mit drei Fragen.
Tausche deine Aufgabe mit dem Nachbarspaar aus und löse deren Aufgabe.*



5.7 Die *Dualität* unter den Platonischen Körpern

Dualität: Verbinden Sie die Mittelpunkte benachbarter Flächen.



a

^aVorlage: D. Ortner: *Die fünf Platonischen Körper*
<http://www.zebis.ch/inhalte/unterricht/mathematik/polyeder.pdf>

Aufgaben 5.38

- *Formuliere den Euler'schen Polyedersatz und überprüfe seine Gültigkeit an den Platonischen Körpern.*
- *Untersuche die Platonischen Körper auf Dualität.*

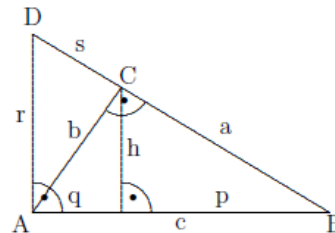
Aufgaben 5.39

- *Definiere die Körper Würfel und Quader.*
- *Skizziere ein zugehöriges Schrägbild.*
- *Skizziere die zugehörigen Netze.*
- *Leite eine Formel für die Oberfläche und das Volumen her.*

5.8 Weitere Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras

Aufgaben 5.40 Aus der SMART - Aufgabensammlung der Uni Bayreuth:

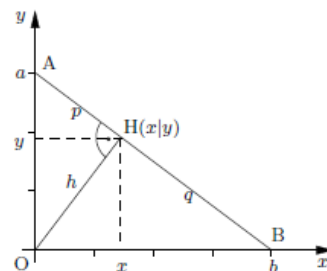
- In der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Figur sind bekannt:
 $h = 6,0$ cm und $p = 18,0$ cm.
 Berechne q , b , s und r .
 (Ergebnisse: $q = 2,0$ cm; $b \approx 6,3$ cm; $s \approx 2,1$ cm;
 $r \approx 6,7$ cm)



- Im Dreieck $\triangle OBA$ mit $O = (0|0)$, $B = (b|0)$ und $A = (0|a)$ ist $H = (x|y)$ der Fußpunkt der Höhe von O auf AB . Weitere Bezeichnungen:

$$h = \overline{OH}, p = \overline{AH}, q = \overline{HB} \text{ und } c = \overline{AB}.$$

Drücke c , h , p , q und die Koordinaten von H durch a und b aus. Jeder Ansatz ist durch Nennung des Satzes und des Dreiecks, auf das er sich bezieht, kurz zu begründen. Vereinfache die Ergebnisse! Berechne c , h , p , q und die Koordinaten von H für $a = 3$ und $b = 4$.



Ergebnisse:

Pythagoras in $\triangle OBA$: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Fläche von $\triangle OBA$: $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc \Rightarrow h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{12}{5} = 2,4$

Kathetensatz in $\triangle OBA$: $pc = a^2 \Rightarrow p = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{9}{5} = 1,8$

Kathetensatz in $\triangle OBA$: $qc = b^2 \Rightarrow q = \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{16}{5} = 3,2$

Fläche von $\triangle OBH$: $\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}hq \Rightarrow y = \frac{hq}{b} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{48}{25} = 1,92$

Kathetensatz in $\triangle OBH$: $xb = h^2 \Rightarrow x = \frac{h^2}{b} = \frac{a^2b}{a^2 + b^2} = \frac{36}{25} = 1,44$

3. In nebenstehendem Dreieck ABC sind gegeben:

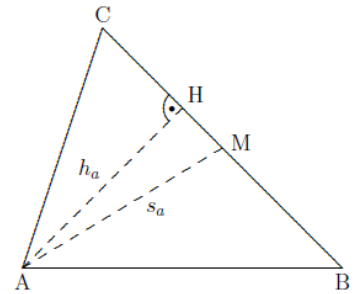
Höhe $h_a = 60$ mm;

Seitenhalbierende $s_a = 65$ mm;

Flächeninhalt $F = 2220$ mm².

(a) Berechne die Seitenlänge \overline{AC} des Dreiecks ABC .
(Ergebnis: $\overline{AC} = 12\sqrt{26}$ mm)

(b) Das Lot von H auf $[AC]$ trifft $[AC]$ im Punkt G .
Berechne \overline{CG} .
(Ergebnis: $\overline{CG} = \frac{6}{13}\sqrt{26}$ mm)



Zum Abschluss, noch zwei klassische Aufgaben:

Aufgaben 5.41 *Wir gehen von einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den üblichen Bezeichnungen und $a = 4$ und $c = 6$ aus.*

Berechne b, h, p und q

Aufgaben 5.42 *Wir gehen von einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den üblichen Bezeichnungen und $b = 5$ und $h = 4$ aus.*

Berechne a, c, p und q

Viel Erfolg beim Suchen weiterer Aufgaben im *www ...*

5.9 Meine Zusammenfassung