Flächenberechnungen
&
-verwandlungen

Geometrie

Kapitel 5

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

21. Februar 2023

Ein Überblick über die bisherigen *GEOMETRIE* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

5 Flächenberechnungen

5.1 Einleitung

Wir beginnen mit der Frage, was es *heisst, zu messen* und stellen die kleinsten und gössten Einheiten zusammen.
Mit der *Herleitung der Flächenformeln einfacher, geradlinig begrenzter Figuren* werden wir in die Flächenberechnung einsteigen und dabei ein weiteres Mal mit *GeoGebra* arbeiten.
Ausführlich werden wir uns mit den *Flächenverwandlungen* befassen, um einerseits die Bedeutung der *Abhängigkeiten* in den Flächenformeln zu zeigen und anderseits auch als Vorbereitung für den Beweis des *Kathetensatzes.* Abschliessen werden wir diesen Abschnitt mit dem *Ergänzungsparallelogramm.*
Es folgt *eine Herleitung der Satzgruppe des Pythagoras* und die klassischen Anwendungen der *Flächverwandlungen und des geometrischen Wurzelziehens.* Die Wurzeln werden wir auch noch algebraisch behandeln und zeigen, dass nicht alle Wurzeln rational sind. Für die Aufgaben greifen wir auf Quellen im Internet zurück.
Wir schliessen dieses Kapitel mit dem *Pythagoras im Raum*, um insbesondere mit der Behandlung des *Normwürfels* unser räumliche Vorstellungsvermögen weiter zu schulen und abschliessenden Aufgaben zur Anwendung von Pythagoras.

5.2 Messen & Masse

Ein ganz wichtiger Begriff in der Mathematik und den Naturwissenschaften ist der Begriff des *Messens*.

Wir messen

- die Zeit,
- die Temperatur,
-
-
-
-
-

Doch was heisst *messen* überhaupt?

das hat zur Folge, dass die Angabe einer *gemessenen* (oder später auch berechneten) *Grösse*, die Angabe der verwendeten *Masseinheit* und der davon abhängigen *Masszahl* verlangt:

Die im Alltag verwendeten *Einheitsstrecken* sind

und wir können feststellen,

eine grössere Einheitsstrecke führt zu einer

eine kleinere Einheitsstrecke führt zu einer

Die heute verwendeten Masseinheiten stammen aus der Landvermessung und die Länge des *Urmeters* wurde am 7. April 1795 von der französischen Nationalversammlung beschlossen:

Kleinere Einheiten werden vom Urmeter abgeleitet:

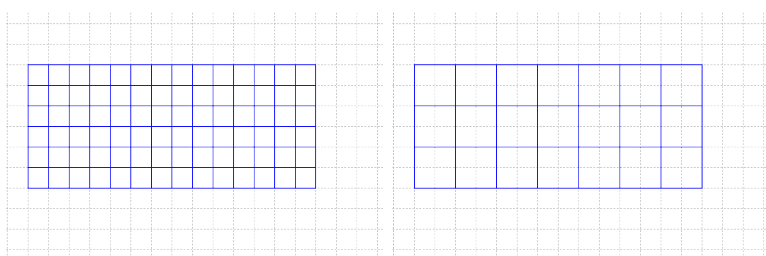
Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung	führt auf ...
Dezi	d		
Zenti			

und ebenso unsere grösseren Einheiten:

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung	führt auf ...
Deka	da		
Hekto			

Wie werden nun Flächen *gemessen* ?

Leicht lässt sich erkennen, dass für die Berechnung des Flächeninhaltes eine Rechtecks mit den Seitenlängen a und b folgendes gilt:



und für das Quadrat folgt:

Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 1*
(Zugehörige Lösungen)

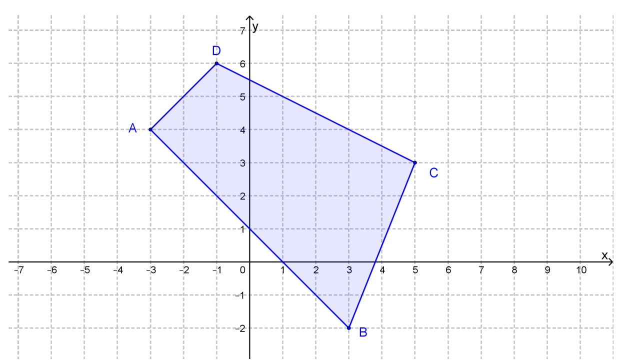
5.3 Flächeninhalt einfacher Figuren

Wir werden insbesondere die folgenden (schon bekannten) Eigenschaften verwenden:

-
-
-

und beginnen mit folgendem Beispiel:

Beispiel 5.1 Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte und den Flächeninhalt von folgendem Viereck:



Die*Ziele* der folgendenen **Aufgaben** sind die Herleitung von *Flächenformeln*. Diese sind jeweils mit Informationen aus dem Internet und *GeoGebra* zu erreichen.
Arbeitet soweit wie möglich selbständig. Wenn ihr die Flächenformeln nicht herleiten könnt, stehen euch noch *ggb-*, *pdf-* und *mp4-files* zur Verfügung.
Eure Zusammenfassung der geometrischen Eigenschaften und Flächenformel und eure Fragen behandeln wir gemeinsam in der Klasse, nach der Herleitung der Trapezformel.

5.3.1 Der Rhombus

Aufgaben 5.1 *Definiere, was ein* Rhombus *ist:*

Aufgaben 5.2 *Konstruiere den Rhombus $ABCD$ mit der Seitenlänge $s = 5cm$ und dem Winkel $\alpha = 55^0$ in der Ecke von A.*
Zeichne die Diagonalen ein, was fällt auf.
Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Rhombus zusammen und überlege die Herleitung einer möglichen Formel zur berechnung der Fläche.

Für eine selbständige Nachbearbeitung stehen euch die folgenden *files* zur Verfügung:
(Ihr braucht nicht alle zu verwenden, wählt das Medium aus, welches euer Lernen am besten unterstützt.

RhombusFläche - *ggb*
RhombusFläche - *pdf*
RhombusFläche - *mp4*

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalte eines Rhombus ist ...

5.3.2 Das Parallelogramm

Aufgaben 5.3 *Definiere, was ein* Parallelogramm *ist:*

Aufgaben 5.4 *Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ mit den Seiten $a = \overline{AB} = 6cm$ und $b = \overline{BC} = 3cm$ und dem Winkel $\alpha = 35^0$ in der Ecke A.*
Zeichne die Diagonalen ein, fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Parallelogramms zusammen und überlege eine mögliche Herleitung einer Flächenformel.

Für eine selbständige Nachbearbeitung stehen euch wieder die folgenden *files* zur Verfügung:

PGFläche - *ggb*
PGFläche - *pdf*
PGFläche - *mp4*

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist ...

5.3.3 Das Dreieck

Für die Herleitung der Formel zur Berechnung des zugehörigen Flächeninhalts stehen euch die folgenden *files* zur Verfügung:

DreiecksFläche - *ggb*
DreiecksFläche - *pdf*
DreiecksFläche - *mp4*

und fasse zusammen:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist ...

Aufgaben 5.5

1. *Überlege dir, ob auch die folgenden Formeln gelten:*

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a \;=\; \frac{1}{2}b \cdot h_b$$

2. *Leite die Formel* $A_{\Delta ABC} = \dfrac{ab}{2}$ *zur Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks* ΔABC *selber her:*

Aufgaben 5.6 *Konstruiere das Dreieck* ΔABC*,*

$$\textit{mit } c = 7cm,\ \alpha = 50^0 \ \textit{ und } \omega_\alpha = 5cm.$$

Bestimme mit Hilfe von GeoGebra *die notwendigen Grössen, damit du den Flächeninhalt berechnen kannst, berechne ihn und kontrolliere dein Resultat mit der Flächenbestimmung, die* GeoGebra *selber ausführen kann.*

5.3.4 Das Trapez

Aufgaben 5.7 *Definiere, was ein* Trapez *ist:*

Aufgaben 5.8 *Konstruiere das Trapez $ABCD$ mit den Seiten $a = \overline{AB} = 5cm$, dem Winkel $\beta = 45^0$ in der Ecke B, $c = \overline{BC} = 6.5cm$ und der Mittelline $m = 6cm$*
Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Rhombus zusammen und überlege die Herleitung einer möglichen Formel zur berechnung der Fläche.

Für eine selbständige Nachbearbeitung stehen euch die folgenden *files* zur Verfügung:

TrapezFläche - *ggb*
TrapezFläche - *pdf*
TrapezFläche - *mp4*

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalte eines Trapezes ist ...

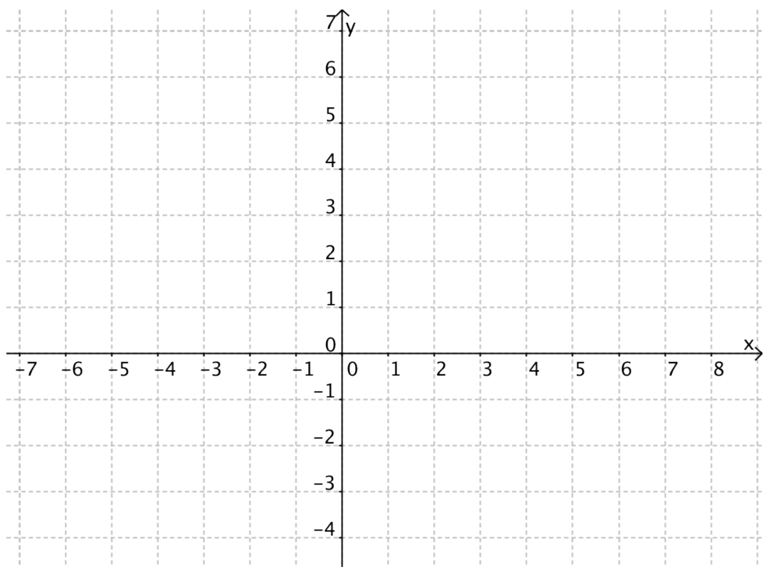
Wir diskutieren nun noch in der Klasse eure Lösungen und Fragen. Eure *ggb-Lösungen* könnt ihr anschliessend ausdrucken & einkleben.

5.3.5 Beliebige, geradlinig begrenzte Vielecke

Von ganz grosser Bedeutung in der Geometrie ist das Dreieck, da sich jede geradlinig begrenzte Figur in Dreiecke zerlegen lässt (die sog. ....). Wenn wir nun die Berechnungen in einem Dreieck durchführen können, so könnnen wir durch Summen- oder Differenzbildungen auch Berechnungen in einem beliebigen Vieleck durchführen, wenn wir dieses in Dreiecke (oder andere uns bekannte Figuren) zerlegen.

Aufgaben 5.9 *Berechne den Flächeninhalt im Viereck ABCD, mit*

$$A = (-3/4), B = (3/-2), C = (5/3) \textit{ und } D = (-1/6)$$



Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 2*
(Zugehörige Lösungen)

5.4 Flächenverwandlungen

Bei *Flächenverwandlungen* geht es nun darum

- die Form einer geometrischen Figur zu ändern

  und dabei

- den Flächeninhalt beizubehalten.

Um die *Flächengleichheit* erhalten zu können müssen wir die Flächenformeln und deren Abhängigkeiten kennen:

Wir beginnen *im Dreieck:*

Die Dreiecksfläche $A_{\Delta ABC}$ berechnet sich mittels

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

oder allgemein: Grundseite · zugehörige Höhe : 2

das heisst,

> dass der Flächeninhalt von der Länge der Grundseite und der Länge der zugehörigen Höhe abhängig ist;

und bedeutet,

> dass wenn wir die Länge der Grundseite und die Länge der zugehörigen Höhe beibehalten, wir den gleichen Flächeninhalt haben.

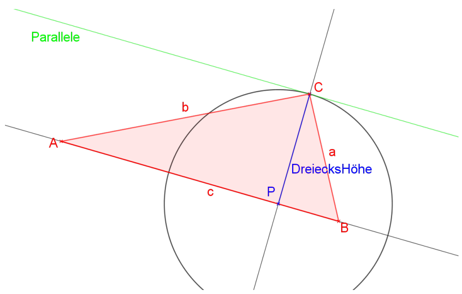
Für die folgenden Aufgaben und Beispiele stehen euch jeweils *ggb*-files auf der homepage zur Verfügung:

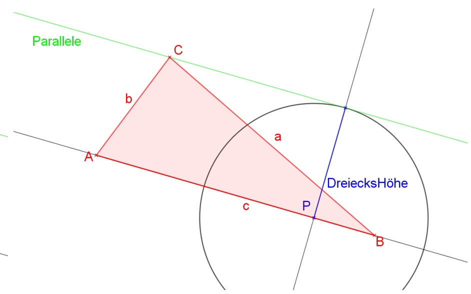
Dreieck, Trapez, Grundaufgaben A - C, Heureka
Aufgabenvorlagen für das 5-Eck, für die Summenfläche

Wir beginnen mit dem *GeoGebra*-file *Dreieck*:

Beispiel 5.2 Lade das *ggb*-file zuerst auf deinen Computer herunter und öffne es.

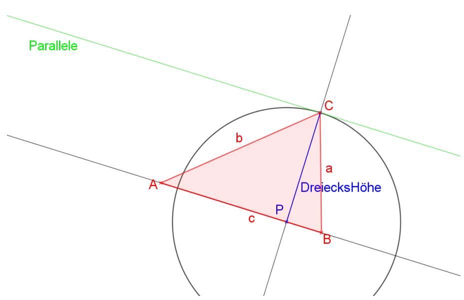
1. Mach nun den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC und die Grösse der Höhe in der graphischen Darstellung sichtbar.
2. Verschiebe den Punkt C entlang der Parallelen zur Grundseite c.





3. Beachte dabei die Anzeige des Flächeninhaltes ....
   (a) Was fällt auf ?
   (b) Erkläre.

4. Verschiebe nun den Punkt B und beachte dabei wieder die Anzeige des Flächeninhaltes ...
   (a) Was fällt auf ?
   (b) Erkläre.



Aufgaben 5.10 *Die gleichen Überlegungen zum* Parallelogramm:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms $A_{PG\ ABCD}$ berechnet sich mittels folgender Formel:

oder allgemein: ...

das heisst,

dass der Flächeninhalt abhängig ist von: ...

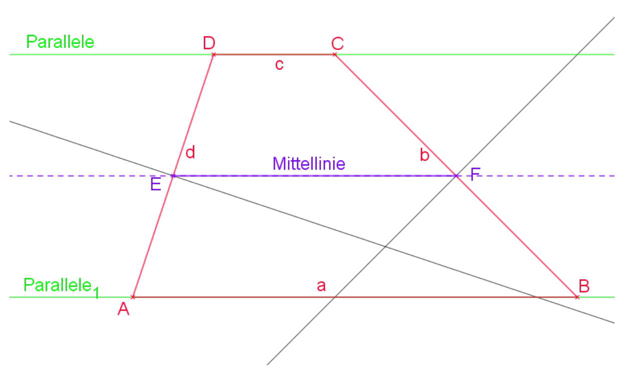
und bedeutet,

dass ...

Aufgaben 5.11 *Der Flächeninhalt eines Trapezes ist abhängig von* ...

Wir verwenden das *GeoGebra*-file *Trapez*:

1. *Lade das* ggb-*file zuerst auf deinen Computer herunter und öffne es.*
2. *Mach den Flächeninhalt des Trapezes ABCD in der graphischen Darstellung sichtbar.*
3. *Konstruiere nun zwei weitere Trapeze mit dem gleichen Flächeninhalt.*



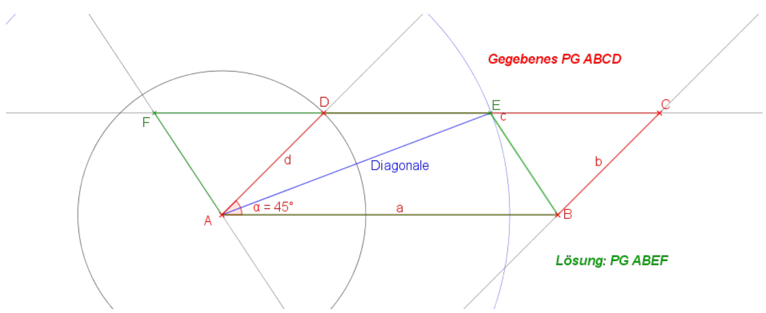
5.4.1 Grundaufgaben

Wir wollen die folgenden klassischen Aufgaben mit Hilfe von *GeoGebra*-files untersuchen:

Aufgaben 5.12

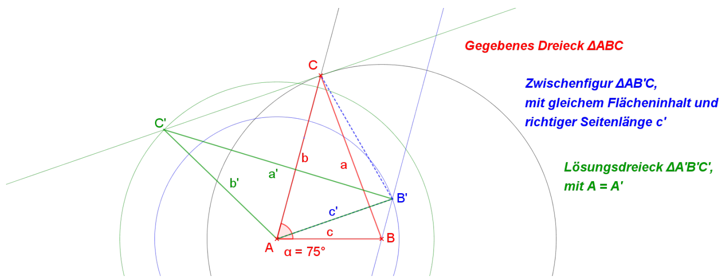
- *Lies die folgenden Aufgaben durch,*
- *lade jeweils die zugehörigen* ggb-*files Grundaufgaben A, B, C herunter und arbeite die Lösung durch:*
- *Notiere* deine *Bemerkungen im Skript,*
- *notiere* deine *Fragen auf Google Drive in den* F&A-*Dokumenten,*
- *beantworte die Fragen deiner MitschülerInnen in den* F&A-*Dokumenten.*
- *Unbeantwortete Fragen werden wir im Klassenverband behandeln.*

1. Verwandle das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 7cm,\ b = 3cm$ und $\alpha = 45^0$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit der Diagonalen $e' = 6cm$.



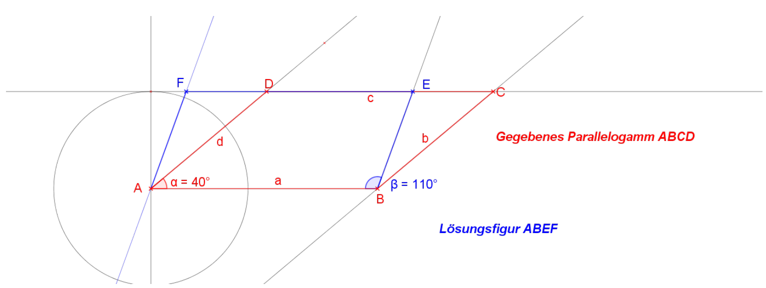
Meine Bemerkungen ...

2. Verwandle das Dreieck ΔABC mit $c = 6cm, \alpha = 75^0$ und $a = 10cm$ in ein flächengleiches Dreieck $\Delta' A'B'C'$ mit $c' = 7cm$ und $b' = 9cm$.



Meine Bemerkungen ...

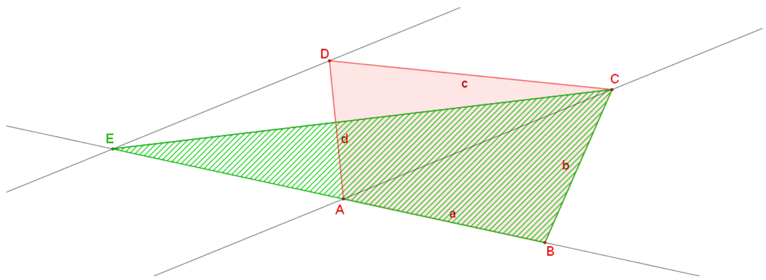
3. Verwandle das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 7cm, h_a = 3cm$ und $\alpha = 40^0$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit $\beta' = 110^0$.



Meine Bemerkungen ...

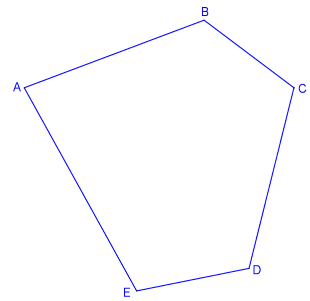
Und noch etwas zum Nachdenken:

Aufgaben 5.13 *Warum sind die Flächeninhalte des Rechtecks $ABCD$ und des Dreiecks ΔEBC gleich:*



Heureka !

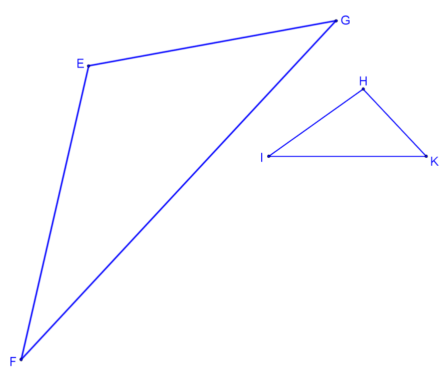
Aufgaben 5.14 *Verwandle das Fünfeck $ABCDE$ in ein flächengleiches Parallelogramm:*
Die ggb-*Vorlage steht euch auf der homepage zur Verfügung;*



Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ für welches gilt:

$$A_{ABCD} = A_{\Delta EFG} - A_{\Delta HIK}$$

Die ggb-*Vorlage steht euch auf der homepage zur Verfügung;*



Wenn ihr eure Lösungen auf Abruf zur Verfügung stellen wollt, postet eure Email-Adresse in das zugehörige *F&A*-Dokument.

Aufgaben 5.15 *Führe deine Überlegungen zur* Summe zweier Flächen *an einem eigenen Beispiel durch und konstruiere und kontrolliere mit den Möglichkeiten von* GeoGebra*.*

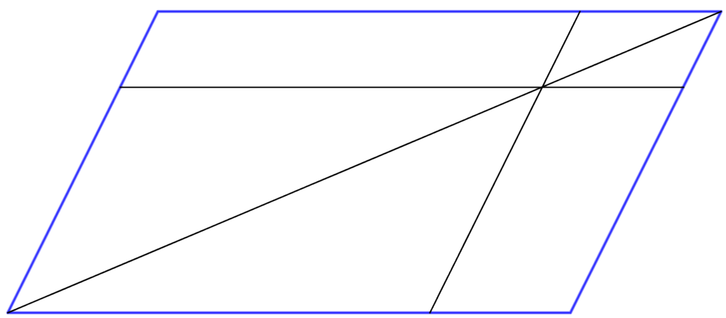
Aufgaben 5.16 *Gebe dir zwei unterschiedlich grosse Dreiecke* Δ_1 *und* Δ_2 *vor, mit* $A_{\Delta_1} > A_{\Delta_2}$*.*
Konstruiere ein Dreieck Δ_3 *mit der Eigenschaft:* $A_{\Delta_3} = A_{\Delta_1} - A_{\Delta_2}$

Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 3*
(Zugehörige Lösungen)

Geometrie-Aufgaben: *Grundaufgaben Scherungen*
(Zugehörige Lösungen)

5.4.2 Ergänzungsparallelogramme

Wir betrachten die folgende Ausgangssituation:



Aufgaben 5.17 *Konstruiere zur Vorbereitung die obige Figur und untersuche die Inhalte der Teilflächen mit* GeoGebra

Aufgaben 5.18 *Bereite wieder die folgenden Grundaufgaben vor:*

1. *Verwandle ein Parallelogramm* $ABCD$ *mit* $a = 6cm, h_a = 2cm$ *und* $\alpha = 40^0$ *in ein flächengleiches Parallelogramm* $A'B'C'D'$ *mit* $a' = 2.5cm$.

2. *Verwandle ein Quadrat mit* $A = 16cm^2$ *in ein flächengleiches Rechteck mit* $a = 7cm$.

3. *Formuliere eine eigene Aufgabe*

Geometrie-Aufgaben: *Zusatzaufgaben*
(Zugehörige Lösungen)

5.5 Die Satzgruppe des Pythagoras

Zur *Satzgruppe des Pythagoras* gehören wichtige Aussagen zu Flächenbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck, aufbauend aus geschickten Flächenverwandlungen.

Wir beginnen mit den Grundbegriffen:

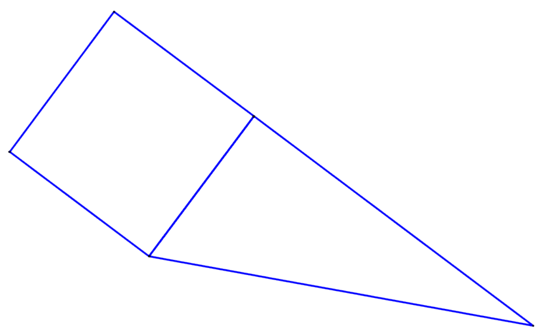
5.5.1 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

5.5.2 Der Satz des Euklid (der Kathetensatz)

In jedem rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt

mathematisch kurz:

geometrisch betrachtet:



Aufgaben 5.19 *Klassische Anwendung:*
Verwandle ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.

Aufgaben 5.20 *Leite den Kathetensatz mit Hilfe der Kathete a her.*

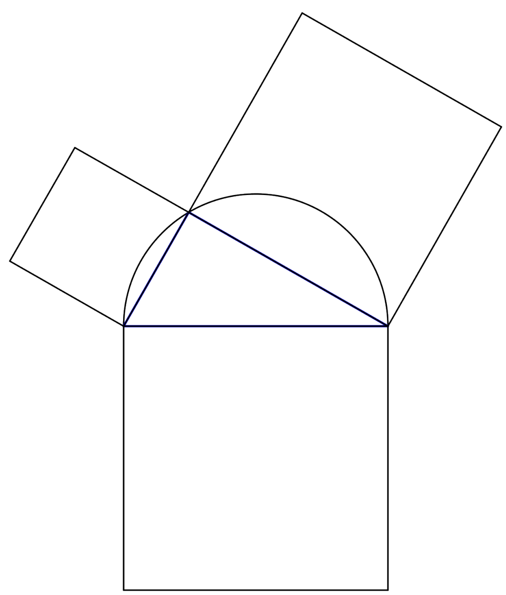
Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 4*
(Zugehörige Lösungen)

5.5.3 Der Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ausgedeutscht:

geometrisch betrachtet:



Aufgaben 5.21 *Suche im Internet nach einer alternativen Herleitung des Satzes des Pythagoras.*

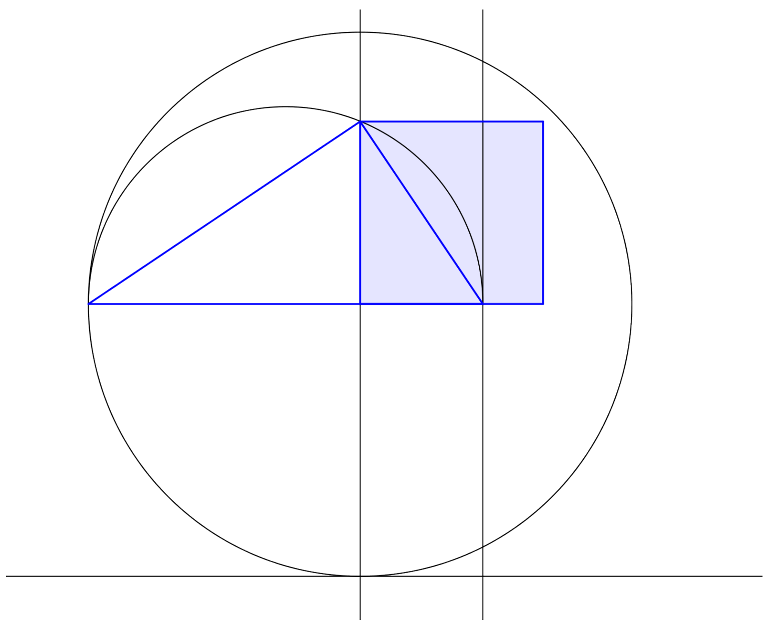
Beispiel 5.3 Gegeben sind die Quadrate $\boxdot_1$ und $\boxdot_2$ mit $A_{\boxdot_1} = 10cm^2$ und $A_{\boxdot_2} = 25cm^2$.
Konstruiere eine Quadrat $\boxdot_3$ mit der Eigenschaft, dass $A_{\boxdot_3} = A_{\boxdot_1} + A_{\boxdot_2}$ und bestimme des Seitenlänge.

Aufgaben 5.22 *Gegeben sind die Quadrate $\boxdot_4$, $\boxdot_5$ und $\boxdot_6$ mit $A_{\boxdot_4} = 36cm^2$, $A_{\boxdot_5} = 6.25cm^2$ und $A_{\boxdot_6} = 1cm^2$.*
Bestimme die Seitenlänge des Quadrates Q mit dem Flächeninhalt $A_Q = A_{\boxdot_4} + A_{\boxdot_5} - A_{\boxdot_6}$.

5.5.4 Der Höhensatz

Herleitung:

geometrisch betrachtet:



ausgedeutscht:

mathematisch kurz:

Aufgaben 5.23 *Leite den Höhensatz mit Hilfe der Kathete b her.*

5.5.5 Eine *SOL-Klassenarbeit* zu Anwendungen der Flächenverwandlungen

.

Aufgaben 5.24 *Die folgenden weiteren klassischen Anwendungen werden wir in der Form einer*

SOL - Klassenarbeit

durchführen:

- *Ihr bekommt den Link zu einer* EXCEL-Tabelle*, auf welcher alle Aufgabennummern aufgeführt sind,*
- *es Platz hat für eure Namen,*
- *die ihr in den Zeilen der von euch gelösten Aufgaben eintragen könnt,*
- *und mit einem Link zu eurer* ggb-*Lösung versehen sollt.*

1. *Verwandle mit Hilfe des Höhensatzes ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.*

2. *Verwandle mit Hilfe des Kathetensatzes ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.*

3. *Verwandle ein Dreieck in ein flächengleiches Quadrat.*

4. *Stelle die Summe einer Dreiecksfläche und einer Quadratfläche durch ein Quadrat dar.*

5. *Stelle die Summe zweier Rechtecksflächen durch eine Quadratfläche dar.*

6. *Verwandle ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 49 in ein flächengleiches Rechteck mit einer Seitenlänge von 8.*
   (a) *mit Hilfe des Kathetensatzes.*
   (b) *mit Hilfe des Höhensatzes.*

7. *Verwandle ein beiliebiges konkaves Viereck mit einem Flächeninhalt ≥ 30 in ein flächengleiches Dreieck, mit einer Grundseitenlänge 7.*

8. *Gebe dir ein beliebiges Rechteck $ABCD$ vor:*
   (a) *Verwandle das Rechteck mit Hilfe des Kathetensatzes in ein Quadrat.*
   (b) *Verwandle das Rechteck mit Hilfe des Höhensatzes in ein Quadrat.*

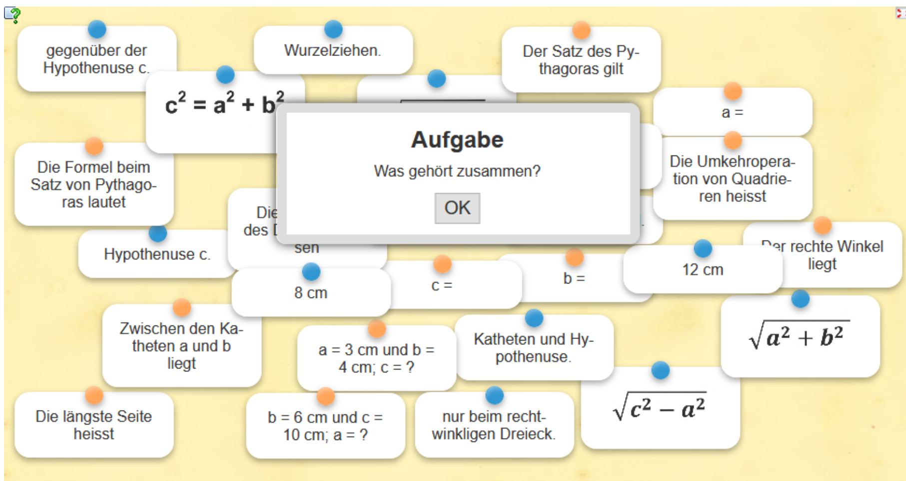
9. *Gebe dir zwei beliebige Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ mit $A_{ABCD} > A_{EFGH}$ vor.*
   Konstruiere eine Quadrat $RSTU$, so dass gilt:
   (a) $A_{RSTZ} = A_{ABCD} + A_{EFGH}$
   (b) $A_{RSTZ} = A_{ABCD} - A_{EFGH}$

10. *Gebe dir ein beliebiges Rechteck $ABCD$ mit $A_{ABCD} > 20$ vor.*
    Verwandle das Rechteck in eine flächengleiches Rechteck $EFGH$ mit einer vorgegeben Seitenlänge von 6.
    (Hinweis: Verwandle zuerst in ein Quadrat und anschliessend in ein Rechteck)

Wir schliessen diese Aufgabe am ...

Aufgaben 5.25 *Noch einige Aufgaben aus dem Internet:*

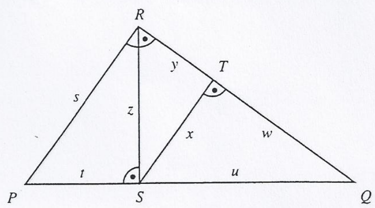
- *ein Quiz:* *https://learningapps.org/1169689*



- *erste Aufgaben:* *http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Pythagoras/Block1/Aufgaben.htm*

Berechne mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten mit den Längen a=5 cm und c=15 cm. Berechne die Länge der Hypotenuse. Lösung	Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine 12 cm lange Basis und 8 cm lange Schenkel. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks! Lösung
Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks mit den Seitenlängen 5 cm und 7 cm? Lösung	In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Flächeninhalt 12 cm² ist die Basis 6 cm lang. Berechne die Länge der Schenkel! Lösung
In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Länge der Basis 8 cm und die Höhe ist 4 cm lang. Wie lang sind die beiden Schenkel? Lösung	Ein Kreis mit dem Radis 4 cm hat eine Sehne der Länge 5 cm. Welchen Abstand hat die Sehne vom Kreismittelpunkt? Lösung
In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Länge der Basis 3,5 cm. Jeder Schenkel ist 4 cm lang. Berechne die Länge der Höhe zur Basis! Lösung	Ein Quadrat hat eine Seitenlänge von 12 cm. Wie lang ist die Diagonale? Lösung



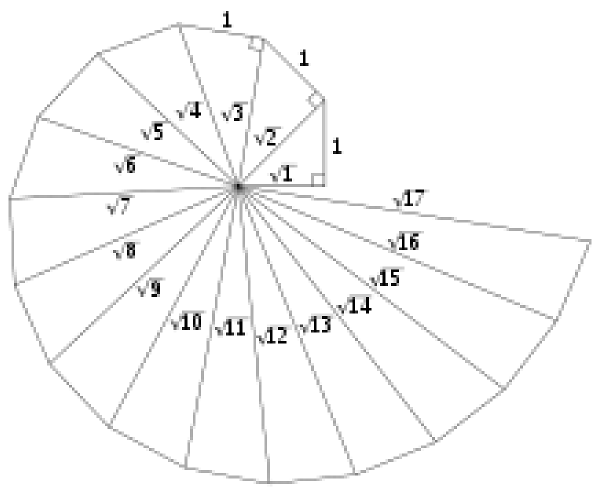
Abkürzungen:

P: Satz des *Pythagoras*
H: Höhensatz
K: Kathetensatz

Beispiel:

	$u^2 = w^2 + \boxed{\quad}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
1.	$u^2 = w \cdot \boxed{\quad}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
2.	$u = z^2 : \boxed{\quad}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
3.	$u = \sqrt{\boxed{\quad} - z^2}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
4.	$x^2 = \boxed{\quad} - y^2$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
5.	$x^2 = \boxed{\quad} \cdot y$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
6.	$y = z^2 : \boxed{\quad}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
7.	$y = \sqrt{z^2 - \boxed{\quad}}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
8.	$y = \boxed{\quad} : w$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
9.	$s^2 = \boxed{\quad} + z^2$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
10.	$s^2 = (t + u)^2 - \boxed{\quad}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
11.	$s^2 = t \cdot \boxed{\quad}$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
12.	$w = z^2 : \boxed{\quad} - y$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$
13.	$w = \sqrt{(u + t) \cdot \boxed{\quad}} - y$	nach $\boxed{\quad}$	im Dreieck	$\boxed{\quad}$

5.5.6 Geometrisches Wurzelziehen



Aufgaben 5.26 *Konstruiere* $\sqrt{2}, \sqrt{20}$ *und* $\sqrt{8}$

Aufgaben 5.27 *Konstruiere $\sqrt{24}$ in möglichst wenigen Schritten mit*

1. *dem Satz des Pythagoras,*
2. *dem Höhensatz,*
3. *dem Kathetensatz.*

Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 6*

5.5.7 Die Algebra der Wurzel

- *die Grundlagen, Definitionen*

- *Wurzelziehen mit dem Taschenrechner*

- *die Rechengesetze*

  Beispiel 5.4
  - $\sqrt{9+16} =$
  - $\sqrt{9} + \sqrt{16} =$
  - $\sqrt{16-9} =$
  - $\sqrt{16} - \sqrt{9} =$
  - $\sqrt{16 \cdot 9} =$
  - $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} =$
  - $\sqrt{16 : 9} =$
  - $\sqrt{16} : \sqrt{9}$

- *partielles Wurzelziehen*

  Beispiel 5.5
  - $\sqrt{12} =$
  - $\sqrt{300} =$
  - $\sqrt{128} =$
  - $\sqrt{20x^2y^2} =$
  - $\sqrt{400x^2y^4z^5} =$
  - $\sqrt{50ab^2c^3} =$
  - $\sqrt{a^2+2ab+b^2} =$

Längerfristig und nachhaltig werden wir uns nun noch mit den folgenden Aufgaben aus dem www auseinandersetzen:

- Eine Auswahl von Aufgaben aus Meinolf Müllers homepage *Fit in Mathe Online :*
  - zur Auswahl ...
  - zu seiner homepage ...
- Aufgaben mit Lösungen, deren Quellen verloren gingen:
  - Aufgaben 1
  - Aufgaben 2

und für die Nachhaltigkeit:

Meine Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntisse aus dem Lösen und Diskutieren der Aufgaben:

5.5.8 Wurzelziehen von Hand

5.5.9 Die Menge der reellen Zahlen

Konstruiere zur Vorbereitung $\sqrt{2}$:

5.5.10 Pythagoras in speziellen geometrischen Figuren

- im gleichseitigen Dreieck:

- im Quadrat:

Aus dem *www* …

- weitere Aufgaben, aus *www.matheaufgaben-loesen.de/*
- Theorieunterlagen von *Andi Räz*

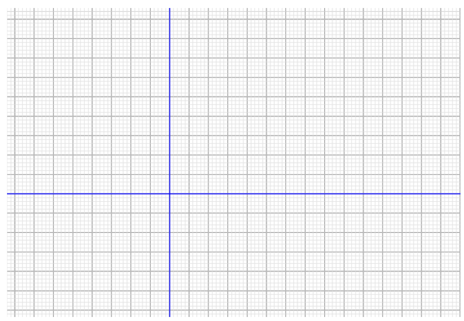
5.6 Pythagoras im Raum

5.6.1 Koordinatensysteme im $\mathbb{R}^3$

Wir repetieren im $\mathbb{R}^2$:

Aufgaben 5.28 *Zeiche die folgenden Punkte ein:*

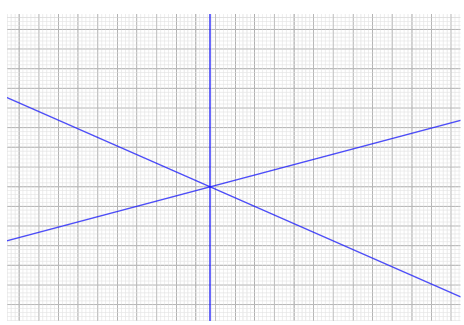
$A = (1/2),\ B = (5/2),\ C = (-3/4),\ D = (0/-3),\ E = (4/0),\ F = (-2/-3)$



Für die Darstellung eines *Koordinatensystems* sind die folgenden Punkte unabdingbar:

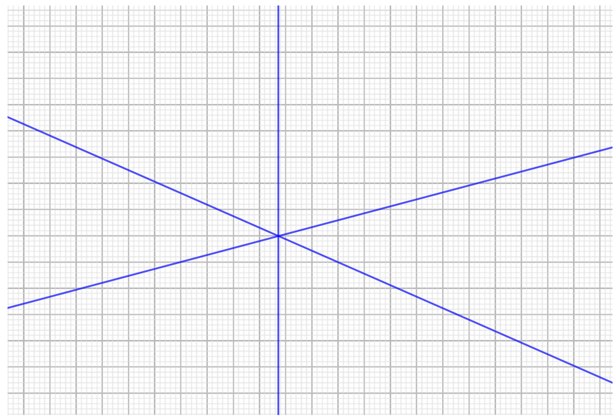
-
-
-
-

Das gilt natürlich auch im Raum, im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$:



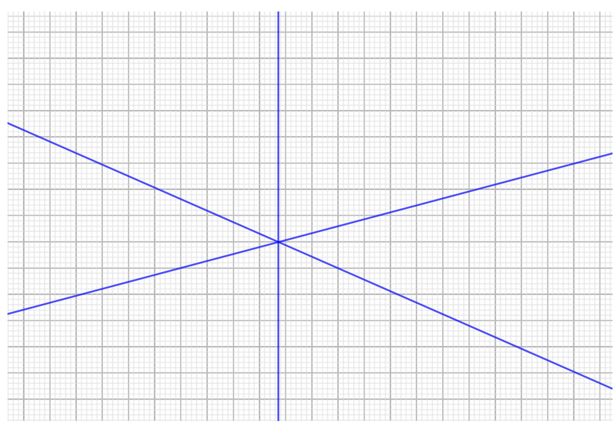
Beispiel 5.6 Zeichne die folgenden Punkte ein:

- $A = (2/0/0)$
- $B = (0/3/0)$
- $C = (0/0/-2)$
- $D = (-3/0/0)$



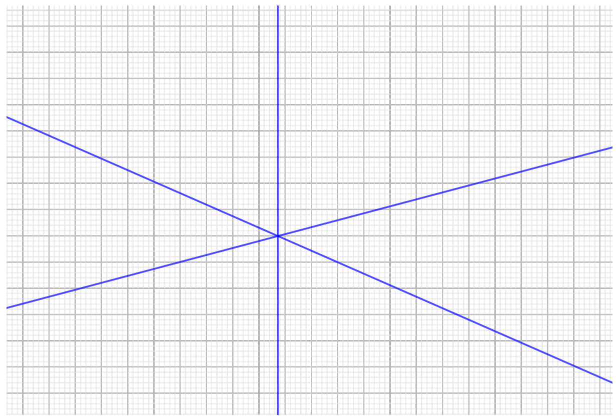
Aufgaben 5.29 *Zeichne die folgenden Punkte ein:*

- $A = (2/3/0)$
- $B = (0/3/4)$
- $C = (2/0/4)$
- $D = (0/2/-4)$
- $E = (-2/-1/0)$

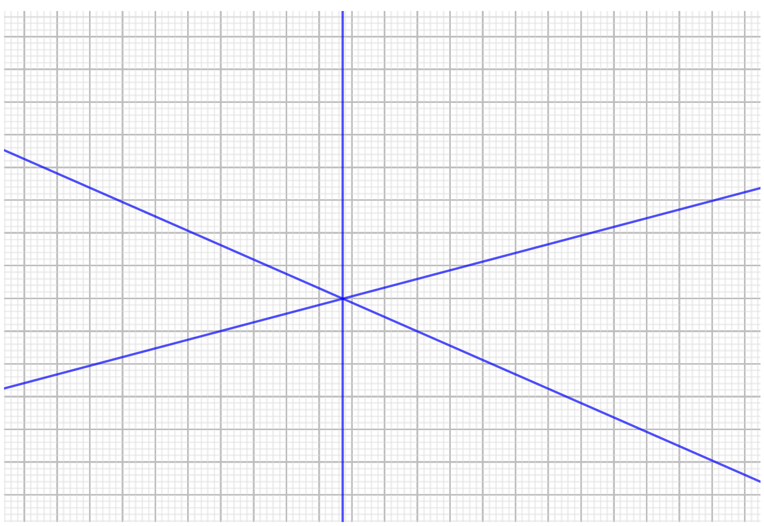


Aufgaben 5.30 *Zeichne die folgenden Punkte ein:*

- $A = (1/2/3)$
- $B = (3/5/-1)$
- $C = (3/-1/5)$
- $D = (-1/-2/3)$

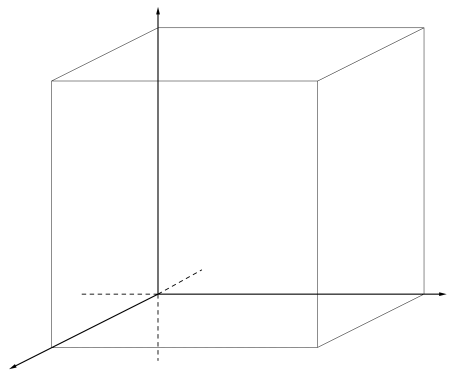


Aufgaben 5.31 *Zeichne alle 6 verschiedenen Wege ein, um vom Ursprung zum Punkt $P(2/4/6)$ zu kommen:*



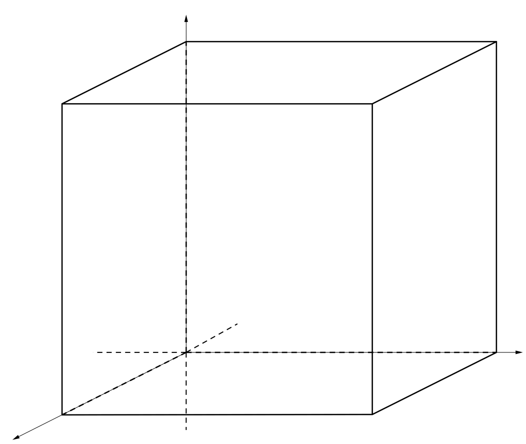
und bestimme den Abstand von P zum Ursprung:

5.6.2 Der Normwürfel

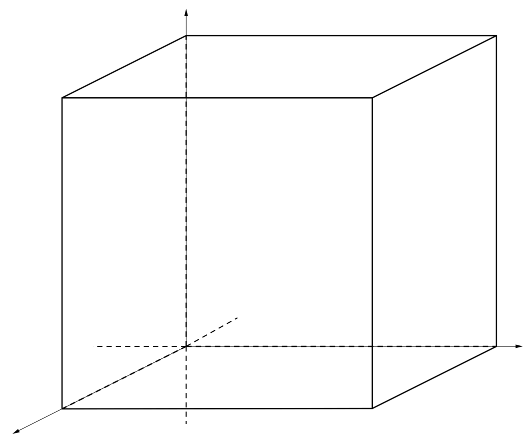


- Kennenlernen des Normwürfels:
  - Markiere alle sichtbaren/ nicht-sichtbaren Kanten,
  - Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte,
  - Zeichne alle rechten Winkel ein,
  - und immer zuerst ...

- Zeichne die folgenden Punkte ein:
  - $A = (0.5/0/0)$
  - $B = (0/1/0.25)$
  - $C = (1/0.5/1)$
  - $D = (0.25/0.5/1)$
  - $E = (0.8/0.8/0.8)$

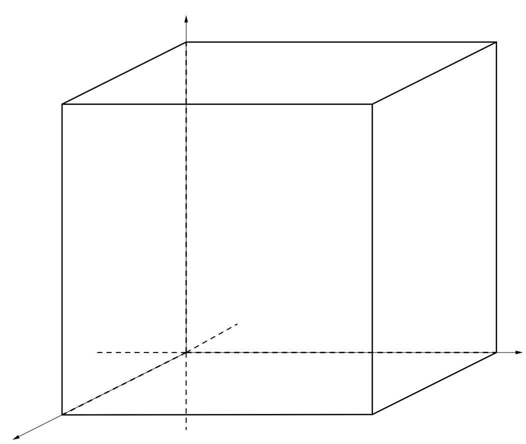


- Bestimme die Koordinaten eines Punktes
  - in der Grundfläche,
  - in der Deckfläche,
  - in der xz-Ebene,
  - in der yz-Ebene,
  - innerhalb des Würfels,
  - ausserhalb des Würfels.

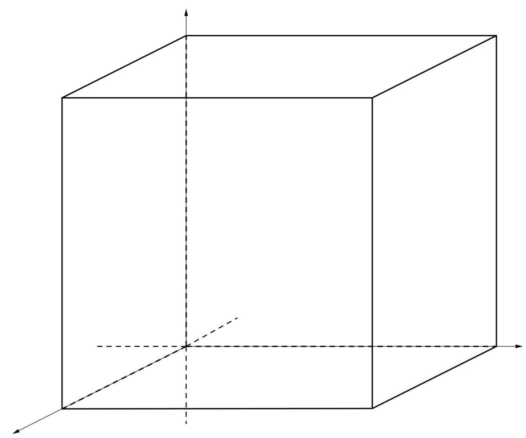


- Zeichne die Diagonalen
  - in der Grundfläche ein,
  - in der rechten Seitenfläche ein,
  - in der hinteren Seite ein,

  und alle dadurch entstandenen
  - 45^0- Winkel,
  - 90^0- Winkel.



- Zeichne ein Dreieck ein, das sicher rechtwinklig ist:
    - In der Deckfläche,
    - in der linken Seitenfläche,
    - in der Frontseite.



Aufgaben 5.32 ***1. Teil:***

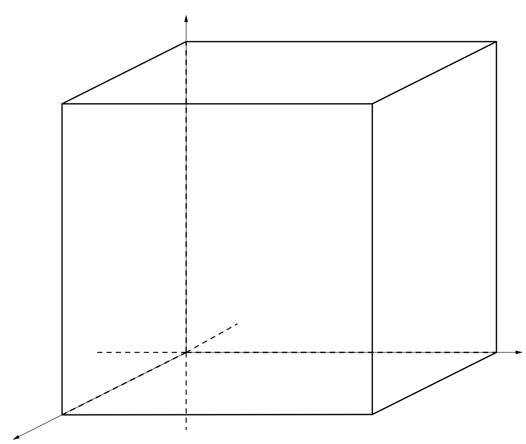
> *Löse unter den folgenden Punkten jeweils nur die ersten beiden Aufgaben und gehe dann weiter zum nächsten Punkt.*
> *Die* $\sqrt{\ }$ *- Werte sind* exakt *anzugeben.*

- Zeichne die folgenden Punkte ein

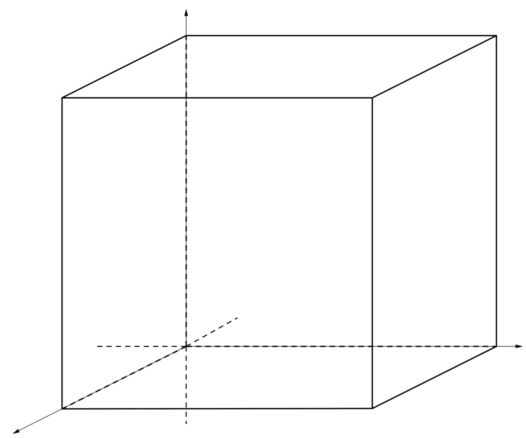
  $A = (1/0/0) \qquad B = (0/1/0)$

  $C = (1/1/0.5) \quad D = (0.8/1/1)$

  und berechne die Länge folgender Strecken:
    - $\overline{AB}$
    - $\overline{AC}$
    - $\overline{CD}$
    - $\overline{DB}$



- Zeichne die folgenden Punkte ein



$A = (1/0/0)$ $B = (1/1/0)$

$C = (0.8/0/0)$ $D = (0.5/1/0.2)$

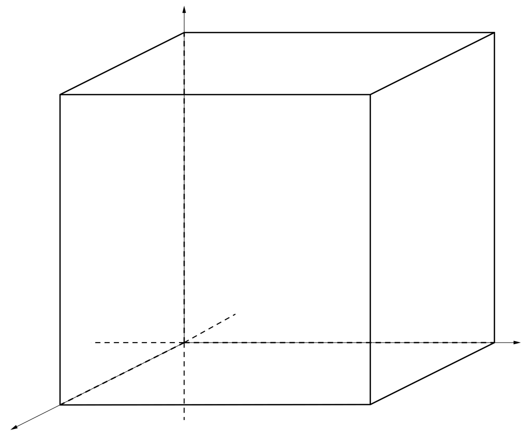
$E = (1/1/1)$ $F = (0/0/1)$

und berechne die Länge folgender Strecken:

  - $\overline{BD}$
  - $\overline{BF}$
  - $\overline{CF}$
  - $\overline{CE}$
  - $\overline{AD}$

Berechne den Inhalt des Dreiecks ΔABC

- Zeichne die folgenden Punkte ein

$A = (1/0/0)$	$B = (1/1/0)$
$C = (0/0/0)$	$D = (0/1/0)$
$E = (1/0/1)$	$F = (1/1/1)$
$G = (0/0.738/1)$	$I = (0/1/0.8)$

  und berechne den Inhalt folgender Dreiecke:

  - ΔACE
  - ΔCBF
  - ΔBDI
  - ΔADI
  - ΔEFG

Aufgaben 5.33 2. Teil

Berechne deine Wurzelwerte der obigen Aufgaben mit dem TR und kontrolliere mit GeoGebra.
Löse den Rest der Aufgaben.

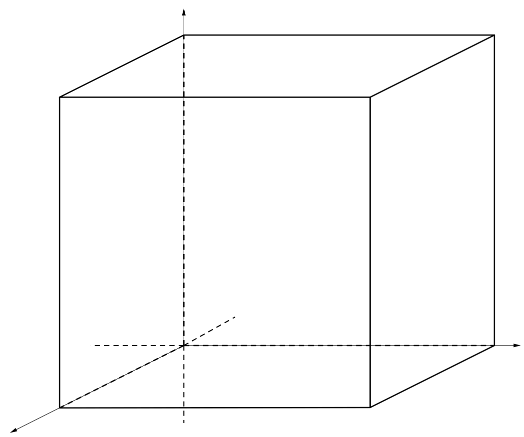
Aufgaben 5.34 *Zeichne die folgenden Punkte ein*

$A = (1/0/0)$ $B = (1/1/0)$

$C = (0/1/1)$ $D = (1/0/0.4)$

$E = (1/1/0.4)$ $F = (0/1/0.8)$

$G = (0/0/0.8)$



und berechne den Inhalt & Umfang folgender Flächen:

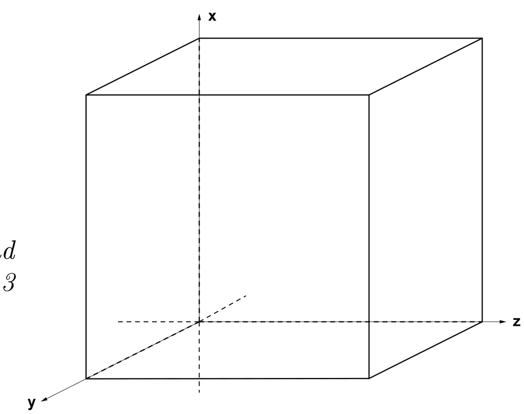
- ABC
- $DEFG$

Aufgaben 5.35 *Zeichne die folgenden Punkte ein:*

$A = (0/1/0)$ $B = (0/0.6/1)$

$C = (0.4/0.6/1)$ $D = (0.4/0.6/0)$

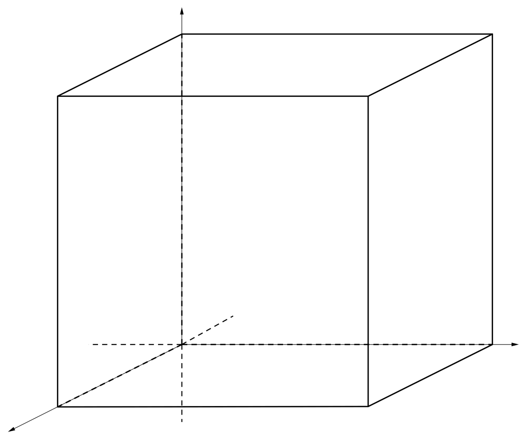
$E = (1/0.6/0.3)$



und berechne den Umfang, Inhalt und die Höhen der folgenden Dreiecke auf 3 Kommastellen genau:

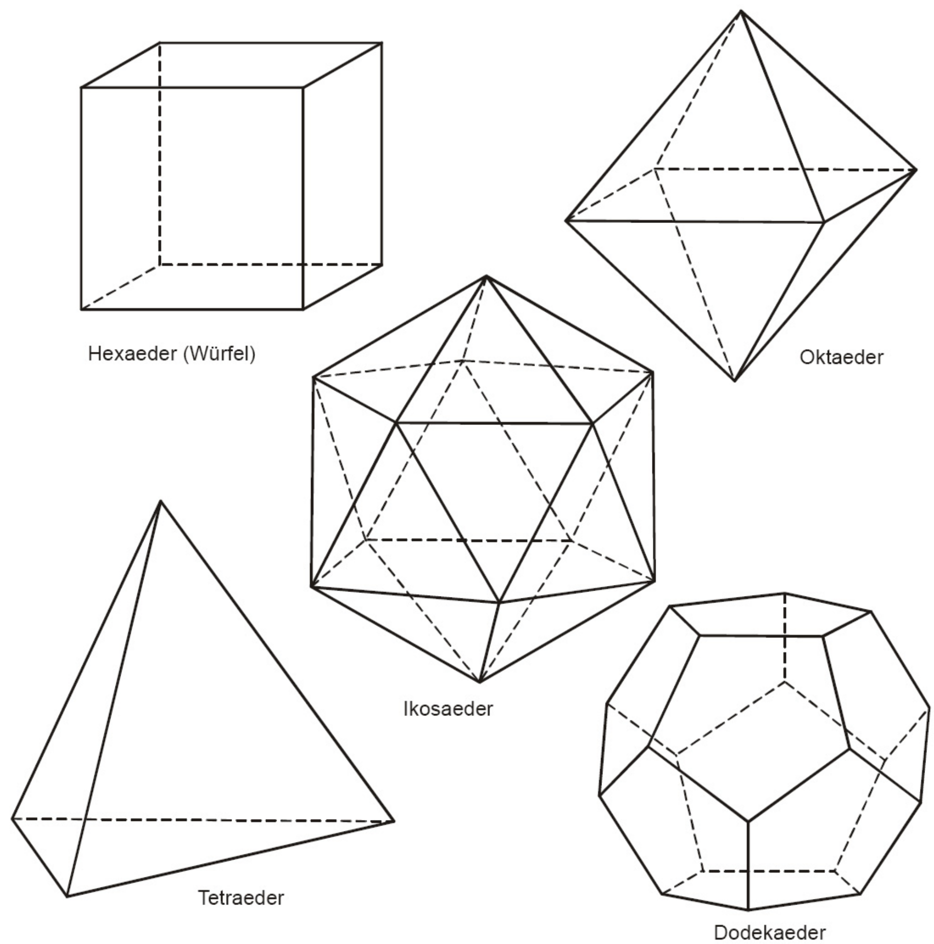
- ΔABC
- ΔDCE

Aufgaben 5.36 *Formuliere mit deinem Banknachbarn eine eigene Aufgabe, mit drei Fragen.*
Tausche deine Aufgabe mit dem Nachbarspaar aus und löse deren Aufgabe.



5.7 Die *Dualität* unter den Platonischen Körpern

Dualität: Verbinden Sie die Mittelpunkte benachbarter Flächen.



[a]

[a]Vorlage: D. Ortner: *Die fünf Platonischen Körper*
http://www.zebis.ch/inhalte/unterricht/mathematik/polyeder.pdf

Aufgaben 5.37

- *Formuliere den* Euler'schen Polyedersatz *und überprüfe seine Gültigkeit an den Platonischen Körpern.*
- *Untersuche die Platonischen Körper auf* Dualität.

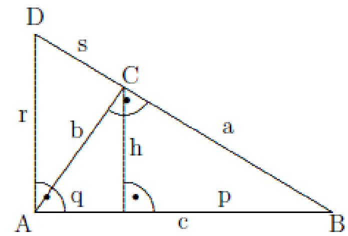
Aufgaben 5.38

- *Definiere die Körper* Würfel *und* Quader.
- *Skizziere ein zugehöriges Schrägbild.*
- *Skizziere die zugehörigen Netze.*
- *Leite eine Formel für die Oberfläche und das Volumen her.*

5.7.1 Weitere Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras

Aufgaben 5.39 *Aus der* SMART - *Aufgabensammlung der Uni Bayreuth:*

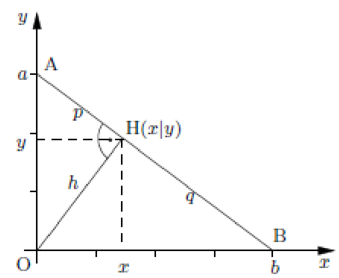
1. In der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Figur sind bekannt:
   $h = 6,0\,\text{cm}$ und $p = 18,0\,\text{cm}$.
   Berechne q, b, s und r.
   (Ergebnisse: $q = 2,0\,\text{cm}$; $b \approx 6,3\,\text{cm}$; $s \approx 2,1\,\text{cm}$; $r \approx 6,7\,\text{cm}$)



2. Im Dreieck $\triangle$OBA mit O = $(0|0)$, B = $(b|0)$ und A = $(0|a)$ ist H = $(x|y)$ der Fußpunkt der Höhe von O auf AB. Weitere Bezeichnungen:

$$h = \overline{\text{OH}},\ p = \overline{\text{AH}},\ q = \overline{\text{HB}} \text{ und } c = \overline{\text{AB}}.$$

   Drücke c, h, p, q und die Koordinaten von H durch a und b aus. Jeder Ansatz ist durch Nennung des Satzes und des Dreiecks, auf das er sich bezieht, kurz zu begründen. Vereinfache die Ergebnisse! Berechne c, h, p, q und die Koordinaten von H für $a = 3$ und $b = 4$.



   Ergebnisse:
   Pythagoras in $\triangle$OBA: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$

   Fläche von $\triangle$OBA: $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc \Rightarrow h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

   Kathetensatz in $\triangle$OBA: $pc = a^2 \Rightarrow p = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{9}{5} = 1{,}8$

   Kathetensatz in $\triangle$OBA: $qc = b^2 \Rightarrow q = \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{16}{5} = 3{,}2$

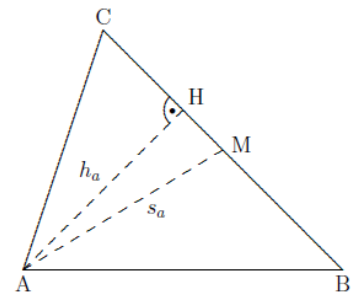
   Fläche von $\triangle$OBH: $\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}hq \Rightarrow y = \frac{hq}{b} = \frac{ab^2}{a^2+b^2} = \frac{48}{25} = 1{,}92$

   Kathetensatz in $\triangle$OBH: $xb = h^2 \Rightarrow x = \frac{h^2}{b} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2} = \frac{36}{25} = 1{,}44$

3. In nebenstehendem Dreieck ABC sind gegeben:
   Höhe $h_a = 60\,\text{mm}$;
   Seitenhalbierende $s_a = 65\,\text{mm}$;
   Flächeninhalt $F = 2220\,\text{mm}^2$.

   (a) Berechne die Seitenlänge $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC.
   (Ergebnis: $\overline{AC} = 12\sqrt{26}\,\text{mm}$)

   (b) Das Lot von H auf $[AC]$ trifft $[AC]$ im Punkt G.
   Berechne $\overline{CG}$.
   (Ergebnis: $\overline{CG} = \frac{6}{13}\sqrt{26}\,mm$)



Zum Abschluss, noch zwei klassische Aufgaben:

Aufgaben 5.40 *Wir gehen von einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den üblichen Bezeichnungen und $a = 4$ und $c = 6$ aus.*

Berechne b, h, p und q

Aufgaben 5.41 *Wir gehen von einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den üblichen Bezeichnungen und $b = 5$ und $h = 4$ aus.*

Berechne a, c, p und q

Viel Erfolg beim Suchen weiterern Aufgaben im *www* ...

5.7.2 Meine Zusammenfassung