

Flächenberechnungen

ein *online*-Projekt
für die gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

25. März 2020

Überblick über die bisherigen *GEOMETRIE* - Themen:

1 Einführung in die Geometrie - Grundbegriffe

- 1.1 Prägende Persönlichkeiten
- 1.2 Warum Geometrie?
- 1.3 Punkt, Strecke, Strahl & Gerade
- 1.4 Das Geodreieck
- 1.5 Der Zirkel
- 1.6 Winkeleigenschaften
- 1.7 Winkelkonstruktionen
- 1.8 Das Billardspiel
- 1.9 Abstandsbestimmungen
- 1.10 Körper

2 Das Dreieck

- 2.1 Grundbegriffe & Notationen am Dreieck
- 2.2 Spezielle Dreiecksformen
- 2.3 Notationen & Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks
- 2.4 Die Kongruenzsätze
- 2.5 Geometrische Orte & weitere Dreieckskonstruktionen
- 2.6 Zusammenfassung

3 Kongruenzabbildungen

- 3.1 Der Begriff der Abbildung
- 3.2 Achsenspiegelungen
- 3.3 Verschiebungen
- 3.4 Drehungen]

4 Vierecke

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Mathematische Vorkenntnisse:	1
1.2	Technische/digitale Unterstützung:	2
1.3	Vorgehensweise	2
1.3.1	Flächenberechnung 1	3
1.3.2	Flächenberechnung 2	3
1.3.3	Flächenberechnung 3	3
1.3.4	Flächenberechnung 4	3
2	Flächeninhalt einfacher Figuren	4
2.1	Der Rhombus	5
2.2	Das Parallelogramm	6
2.2.1	Das Dreieck	7
2.3	Das Trapez	8
2.4	Beliebige, geradlinig begrenzte Vielecke	9
3	Flächenverwandlungen	10
3.0.1	Scherungen	10
3.0.2	Grundaufgaben	11
3.0.3	Ergänzungsparallelogramme	14
3.1	Die Satzgruppe des Pythagoras	16
3.1.1	Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck	16
3.1.2	Der Satz des Euklid (der Kathetensatz)	17
3.1.3	Der Satz des Pythagoras	18
3.1.4	Der Höhensatz	20
3.1.5	Geometrisches Wurzelziehen	22
3.1.6	Die Algebra der Wurzel	24
3.1.7	Pythagoras in speziellen geometrischen Figuren	27
3.1.8	Weitere Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras	29

1 Einleitung

Die vorliegenden Unterlagen sind entstanden aufgrund der Schulschliessungen im Frühling 2020, bedingt durch die Corona-Epidemie/-Pandemie und der dadurch entstandenen Notwendigkeit eines *distance-learning*s und persönlichen Interesses an *digitalen Lernformen & -umgebungen*.

1.1 Mathematische Vorkenntnisse:

- Grundlagen der Geometrie,
- Kongruenzsätze
- *GeoGebra* und Anwendungen in der Geometrie (Konstruktionen)
- **Aktuell:**
 1. Abschnitt aus meinem Skript *Flächenberechnungen*, insbesondere die folgenden Begriffe, welche als *Aufgabe* zu erklären sind:

Aufgaben 1.1 *Erkläre die folgenden Begriffe:*

- *Was heisst messen?*

- *Unterscheide die Begriffe Maßzahl, Maßeinheit und Größe:*

- *Flächeninhalt eines Rechtecks:*

1.2 Technische/digitale Unterstützung:

- www.ronaldbalestra.ch
- *Skript*: als pdf und ergänzt mit *ggb*- und *mp4*-files
- *GeoGebra*
- *Cloud; Google Docs & Drive*,
- *email*,
- *Forum*,
- ...

1.3 Vorgehensweise

Allgemeine Bearbeitungsmethoden:

Da das Hauptdokument ein pdf ist und es nicht einfach ist (technisch & programmseitig), dieses Format zu bearbeiten, empfehle ich die einzelnen Kapitel herunterzuladen, auszudrucken und von Hand oder mit dem Download der Lösungen zu ergänzen.

Betreffend der Aufgaben, sind auf *Google Drive* im Klassenorder der Klasse U2b weitere Ordner zur Flächenberechnung 1 - 4 angelegt, in welchen *Frage & Antwort* Dokumente zum gemeinsamen Bearbeiten der einzelnen Fragen abgelegt sind.

Weiter befinden sich die Theorie erklärende und ergänzende *ggb*- und *mp4*-files in den entsprechenden Ordnern, die natürlich verwendet werden können und sollen.

Was die *mp4*-files betrifft, so muss ich mich für die zum Teil schlechte Tonqualität entschuldigen, ich habe noch keine praktikable Methode zur Rauschunterdrückung gefunden.

Zu den einzelnen Kapitel:

1.3.1 Flächenberechnung 1

ist die Einleitung.

1.3.2 Flächenberechnung 2

behandelt den Flächeninhalt einfacher Figuren.

1.3.3 Flächenberechnung 3

behandelt die Flächenverwandlung.

1.3.4 Flächenberechnung 4

steigt in die Satzgruppe des Pythagoras ein.

2 Flächeninhalt einfacher Figuren

Wir werden für die Berechnung der *Flächeninhalte einfacher Figuren* insbesondere die folgenden (schon bekannten) Eigenschaften verwenden:

- für den *Flächeninhalt eines Rechtecks* A, B, C, D mit den Seitenlängen a und b gilt: $A_{ABCD} = \dots$
- *kongruente Figuren haben den gleichen Flächeninhalt.*

Aufgaben 2.1 *Definiere dazu den Begriff zueinander kongruent sein:*

Aufgaben 2.2 *Repetiere die Kongruenzsätze:*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Die Anwendung der *Kongruenzsätze* läuft im Folgenden meist darauf hinaus, dass wir zwei Figuren auf Kongruenz hin untersuchen, in dem wir überprüfen, ob sie einen der Kongruenzsätze erfüllen. Wenn dies der Fall ist, heisst das, dass die Figuren insbesondere den gleichen Flächeninhalt haben.

- *Der Flächeninhalt einer Figur ist gleich der Summe der Flächeninhalte aller Teilfiguren, welche zueinander disjunkt sind und die gesamte Fläche abdecken.*

Noch eine Begriffserklärung:

Mit *einfachen Figuren* sind geradlinigbegrenzte Figuren gemeint.

Als nicht-geradlinigbegrenzt gelten z.B. Kreise, Ellipsen, Sektoren,

2.1 Der Rhombus

Aufgaben 2.3 *Definiere, was ein Rhombus ist:*

Aufgaben 2.4 *Konstruiere den Rhombus $ABCD$ mit der Seitenlänge $s = 5\text{cm}$ und dem Winkel $\alpha = 55^\circ$ in der Ecke von A . Zeichne die Diagonale ein, was fällt auf.*

Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Rhombus zusammen.

Die Berechnung des Flächeninhalts leiten wir mit Unterstützung des folgenden *ggb-files* her:

[RhombusFläche - ggb](#)
[RhombusFläche - pdf](#)
[RhombusFläche - mp4](#)

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Rhombus ist gleich dem Produkt aus der Seitenlänge der zugehörige Höhe.

2.2 Das Parallelogramm

Aufgaben 2.5 *Definiere, was ein Parallelogramm ist:*

Aufgaben 2.6 *Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ mit den Seiten $a = \overline{AB} = 6\text{cm}$ und $b = \overline{BC} = 3\text{cm}$ und dem Winkel $\alpha = 35^\circ$ in der Ecke A .*

Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Parallelogramms zusammen.

Die Berechnung des Flächeninhalts leiten wir mit Unterstützung des folgenden *ggb-files* her:

[PGFläche - ggb](#)
[PGFläche - pdf](#)
[PGFläche - mp4](#)

Wir fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus der Seitenlänge und der zugehörigen Höhe.

2.2.1 Das Dreieck

Die Berechnung des Flächeninhalts leiten wir an folgender Figur her:

[DreiecksFläche - ggb](#)
[DreiecksFläche - pdf](#)
[DreiecksFläche - mp4](#)

und fassen zusammen:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus der Seitenlänge und der zugehörigen Höhe.

Aufgaben 2.7

1. Überlege dir, ob auch die folgenden Formeln gelten:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b$$

2. Leite die Formel $A_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}$ zur Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC selber her:

Aufgaben 2.8 *Konstruiere das Dreieck ΔABC , mit $c = 7\text{cm}$, $\alpha = 50^\circ$ und $\omega_\alpha = 5\text{cm}$ und leite an diesem Beispiel die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes her.*

2.3 Das Trapez

Aufgaben 2.9 *Definiere, was ein Trapez ist:*

Aufgaben 2.10 *Konstruiere das Trapez $ABCD$ mit den Seiten $a = \overline{AB} = 5\text{cm}$, dem Winkel $\beta = 45^\circ$ in der Ecke B , $c = \overline{BC} = 6.5\text{cm}$ und der Mittellinie $m = 6\text{cm}$*

Fasse alle geometrischen Eigenschaften eines Trapezes zusammen.

Die Berechnung des Flächeninhalts leiten wir mit Unterstützung des folgenden *ggb-files* her:

[TrapezFläche - ggb](#) [TrapezFläche - pdf](#) [TrapezFläche - mp4](#)

Wir fassen zusammen:

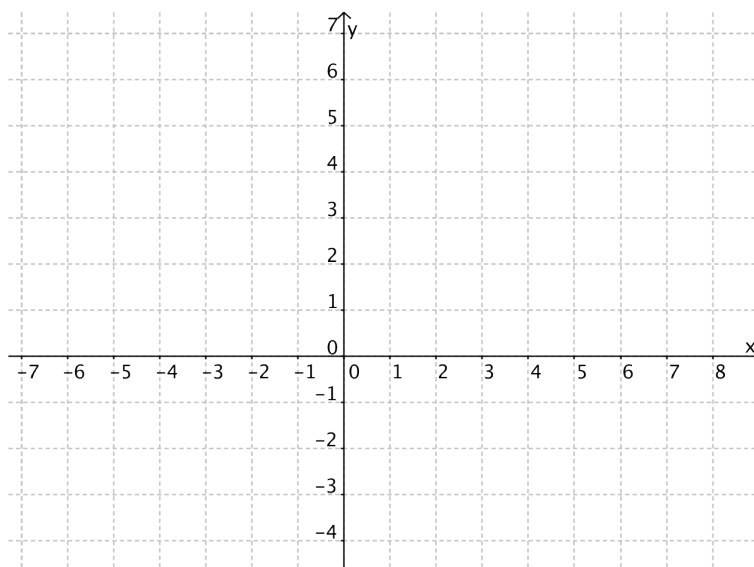
Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Länge der Mittellinie und der Höhe des Trapezes.

2.4 Beliebige, geradlinig begrenzte Vielecke

Von ganz grosser Bedeutung in der Geometrie ist das Dreieck, da sich jede geradlinig begrenzte Figur in Dreiecke zerlegen lässt (die sog. *Triangulation*). Wenn wir nun die Berechnungen in einem Dreieck durchführen können, so können wir durch Summen- oder Differenzbildungen auch Berechnungen in einem beliebigen Vieleck durchführen, wenn wir dieses in Dreiecke (oder andere uns berechenbare Figuren) zerlegen.

Aufgaben 2.11 *Berechne den Flächeninhalt im Viereck ABCD, mit*

$$A = (-3/4), B = (3/ - 2), C = (5/3) \text{ und } D = (-1/6)$$



geradlinig

Geometrie-Aufgaben: Flächenberechnungen 2
(Zugehörige Lösungen)

3 Flächenverwandlungen

Bei *Flächenverwandlungen* geht es darum

- die Form einer geometrischen Figur zu ändern
und
- dabei den Flächeninhalt aber beizubehalten.

Die zugehörigen Konstruktionen wollen wir mit *GeoGebra* durchführen und untersuchen.

3.0.1 Scherungen

Aufgaben 3.1 *Als Vorbereitung für die nächste Theoriestunden:
Erzeuge je ein ggb-file für ein beliebiges Dreieck, Parallelo-
gramm und Trapez.*

Meine Bemerkungen zu den Scherungen ...

- am Beispiel eines Dreiecks ...

- am Beispiel eines Paralleogramms ...

- am Beispiel eines Trapezes ...

3.0.2 Grundaufgaben

Aufgaben 3.2 *Als Vorbereitung für die nächste Theoriestunden:
Erzeuge je ein ggb-file für die in den folgenden Aufgaben
vorgegeben Figuren.*

- Verwandle das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 7\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$ und $\alpha = 45^\circ$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit der Diagonalen $e' = 6\text{cm}$.

Meine Bemerkungen ...

- Verwandle das Dreieck $\triangle ABC$ mit $c = 6\text{cm}$, $\alpha = 75^\circ$ und $a = 8\text{cm}$ in ein flächengleiches Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit $c' = 7\text{cm}$ und $b' = 9\text{cm}$.

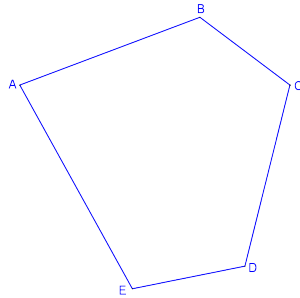
Meine Bemerkungen ...

- Verwandle das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 7\text{cm}$, $h_a = 3\text{cm}$ und $\alpha = 45^\circ$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit der Diagonalen $b' = 5\text{cm}$ und $\beta' = 110^\circ$.

Meine Bemerkungen ...

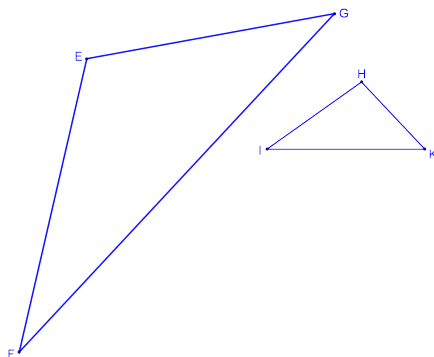
Aufgaben 3.3 Überlege dir das Vorgehen in den folgenden Aufgaben:

- Verwandle das Fünfeck $ABCDE$ in ein flächengleiches Parallelogramm:



- Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ für welches gilt:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle EFG} - A_{\triangle HIK}$$

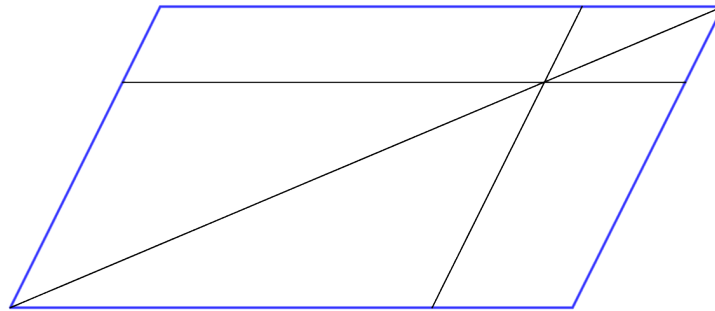


Aufgaben 3.4 *Führe deine Überlegungen zur Summe zweier Flächen an einem eigenen Beispiel durch und konstruiere und kontrolliere mit den Möglichkeiten von GeoGebra.*

Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 3*
(Zugehörige Lösungen)

3.0.3 Ergänzungsp parallelogramme

Wir betrachten die folgende Ausgangssituation:



Aufgaben 3.5 *Konstruiere zur Vorbereitung die obige Figur und untersuche die Inhalte der Teilflächen mit GeoGebra*

Aufgaben 3.6 *Bereite wieder die folgenden Grundaufgaben vor:*

1. *Verwandle ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 6\text{cm}$, $h_a = 2\text{cm}$ und $\alpha = 40^\circ$ in ein flächengleiches Parallelogramm $A'B'C'D'$ mit $a' = 2.5\text{cm}$.*

2. *Verwandle ein Quadrat mit $A = 16\text{cm}^2$ in ein flächengleiches Rechteck mit $a = 7\text{cm}$.*

3. *Formuliere eine eigene Aufgabe*

3.1 Die Satzgruppe des Pythagoras

Zur *Satzgruppe des Pythagoras* gehören wichtige Aussagen zu Flächenbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck, aufbauend aus geschickten Flächenverwandlungen.

Wir beginnen mit den Grundbegriffen:

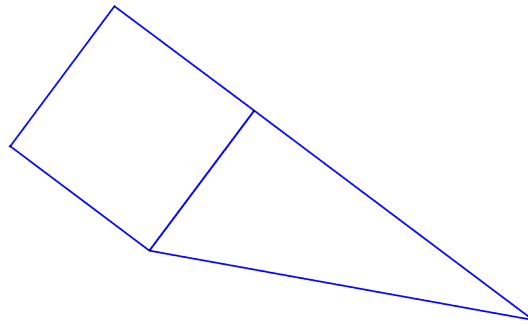
3.1.1 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

3.1.2 Der Satz des Euklid (der Kathetensatz)

In jedem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt

mathematisch kurz:

geometrisch betrachtet:



Klassische Anwendung:

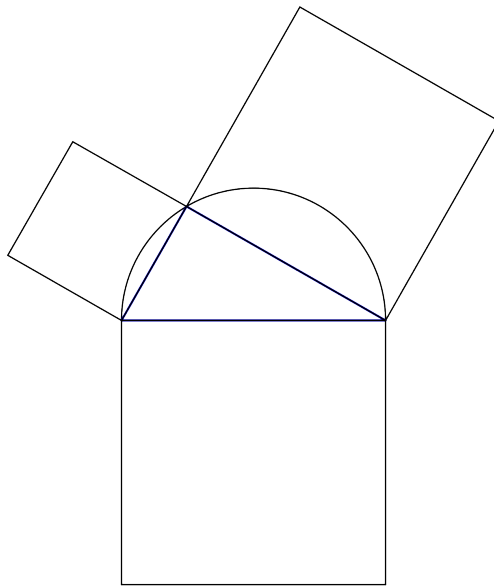
Geometrie-Aufgaben: *Flächenberechnungen 4*
(Zugehörige Lösungen)

3.1.3 Der Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ausgedeutet:

geometrisch betrachtet:

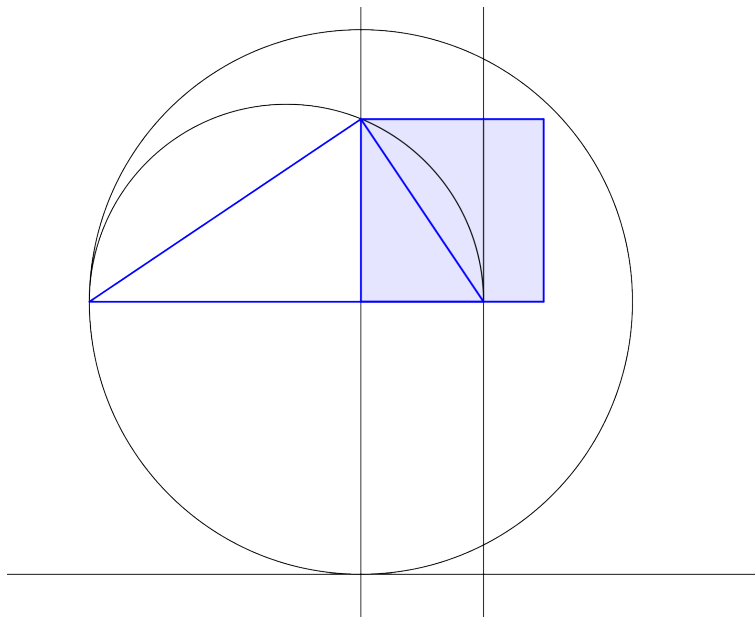


Aufgaben 3.7 Gegeben sind die Quadrate \square_1 und \square_2 mit $A_{\square_1} = 10\text{cm}^2$ und $A_{\square_2} = 25\text{cm}^2$.
Konstruiere ein Quadrat \square_3 mit der Eigenschaft, dass $A_{\square_3} = A_{\square_1} + A_{\square_2}$

3.1.4 Der Höhensatz

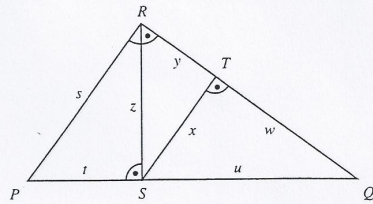
Herleitung:

geometrisch betrachtet:



ausgedeutet:

mathematisch kurz:



Abkürzungen:

P: Satz des Pythagoras

H: Höhensatz

K: Kathetensatz

Beispiel:

$$u^2 = w^2 + \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$1. \quad u^2 = w \cdot \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$2. \quad u = z^2 : \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$3. \quad u = \sqrt{\boxed{} - z^2} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$4. \quad x^2 = \boxed{} - y^2 \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$5. \quad x^2 = \boxed{} \cdot y \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$6. \quad y = z^2 : \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$7. \quad y = \sqrt{z^2 - \boxed{}} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$8. \quad y = \boxed{} : w \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$9. \quad s^2 = \boxed{} + z^2 \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

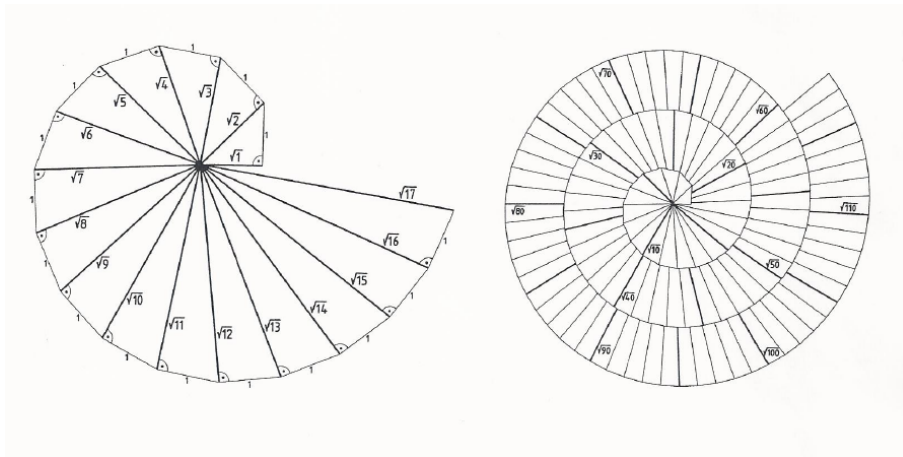
$$10. \quad s^2 = (t + u)^2 - \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$11. \quad s^2 = t \cdot \boxed{} \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$12. \quad w = z^2 : \boxed{} - y \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

$$13. \quad w = \sqrt{(u + t) \cdot \boxed{}} - y \quad \text{nach } \boxed{} \text{ im Dreieck } \boxed{}$$

3.1.5 Geometrisches Wurzelziehen



Aufgaben 3.8 *Konstruiere $\sqrt{2}$ und $\sqrt{6}$*

Aufgaben 3.9 *Konstruiere $\sqrt{24}$ in möglichst wenigen Schritten mit*

- 1. dem Satz des Pythagoras,*
- 2. dem Höhensatz,*
- 3. dem Kathetensatz.*

3.1.6 Die Algebra der Wurzel

- *die Grundlagen, Definitionen*

- *die Rechengesetze*

- *partielles Wurzelziehen*

- *Wurzelziehen mit dem Taschenrechner*

- *Wurzelziehen von Hand*

3.1.7 Pythagoras in speziellen geometrischen Figuren

- im gleichseitigen Dreieck:

- im Quadrat:

3.1.8 Weitere Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras