Beschränktheit, Monotonie & Symmetrie

ein Referat

Dies ist eine Beilage zum *Gruppen-SOL* - Projekt

Potenz- & Exponentialfunktionen

das 1. Referat

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

12. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Übersicht

Ich werde euch in diesem Referat drei Eigenschaften vorstellen:

die Beschränktheit
das Monotonieverhalten
und
die Symmetrieeigenschaften

Die Begiffe werden *streng mathematisch* formuliert und definiert und *geometrisch* an euren Untersuchungen über den Einfluss der Parameter auf die Potenzfunktionen veranschaulicht.

Die mathematische Formulierung ermöglicht uns die geometrisch erkennbaren Eigenschaften über den sichtbaren Bereich hinaus global nachzuweisen.
Es gibt uns auch die Möglichkeit, Funktionen auf diese Eigenschaften hin zu untersuchen, ohne die graphische Darstellung kennen zu müssen. Wir werden die Exponential- & Logarithmusfunktionen dahingehend untersuchen. Diese Resultate werdet ihr im Zusammenhang mit eurem selbständigen Erarbeiten der neuen Funktionstypen über deren graphischen Darstellungen bestätigen können.

Beachtet bitte, dass das Folgende als ein *Referat* konzipiert. Bei einem *Referat* geht es nur um die Präsentation von (gesicherten) Erkenntnisse.
Das Ziel ist somit *nicht* das gemeinsame Erabeiten, sondern nur das Vermitteln von Sachverhalten.

Wir werden nach dem Referat und einer kurzen Pause in einer *Anschlussdiskussion* Fragen diskutieren.

Dauer: 25 - 30min

2 Motivation für die Definition dieser Begriffe

Bei den Betrachtungen eurer vorbereiteten graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen lassen sich gewisse geometrische Eigenschaften leicht erkennen:

- Die Potenzfunktionen mit natürlichen geraden Exponenten erreichen nie einen Wert kleiner als Null. Dieser Funktionstyp hat also eine untere Schranke, die er nie unterschreiten kann und ist somit nach unten beschränkt.
  Aber gibt es wirklich keinen Wert kleiner als 0, den die Funktion annehmen kann? Wir sehen schliesslich nur einen kleinen Ausschnitt des Graphen!
  Wir brauchen also einen Begriff der diese Eigenschaft global beschreibt und mathematisch auch verifizierbar ist:

  die Beschränktheit

- Bei den Potenzfunktionen mit natürlichen ungeraden Exponenten können wir sehen, dass der Funktionswert mit grösser werdendem Argument auch immer grösser wird. Der Graph verläuft steigend.
  Aber auch hier stellen sich die Fragen, verläuft der Graph auch ausserhalb unseres Fensters weiterhin steigend? Bei grösser werdendem Exponenten können wir feststellen, dass der Graph um den Ursprung sehr flach verläuft. Ist die Funktion über diesem Bereich konstant, oder ist es nur ein Problem der Auflösung und der Graph verläuft auch hier steigend?
  Wir brauchen also auch hier einen Begriff der diese Eigenschaft global beschreibt und mathematisch verifizierbar ist:

  die Monotonie

- Bei den Potenzfunktionen mit negativen geraden Exponenten lässt sich leicht erkennen, dass die Graphen durch spiegeln an der y-Achse auf sich selber abgebildet werden.
  Ist das aber wirklich so, oder nur ungefähr so? Wir brauchen also einen Begriff der auch diese Eigenschaft exakt beschreibt und mathematisch ebenfalls verifizierbar ist:

  die Symmetrie

Im Folgenden werden ich diese Begriffe definieren und in einigen Aussagen auch beweisen.

3 Die Beschränktheit

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **nach unten beschränkt** $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ c \in \mathbb{R} : f(x) \geq c\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$$

In Analogie folgt:

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **nach oben beschränkt** $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ C \in \mathbb{R} : f(x) \leq C\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$$

Die folgenden Punkte gilt es hier zu beachten:

- c, C sind heissen *(untere/obere) Schranken.*
- Die Definitionen sind global und somit auf dem gesamten Definitionsbereich gültig.
- Die Schranken können als Funktionswerte angenommen werden, müssen aber nicht.
- Die Schranken sind nicht eindeutig bestimmt sind.
  Wenn zum Beispiel 0 eine untere Schranke ist, ist auch -17.23 eine untere Schranke. Von grossem Interesse sind die *grössten unteren Schranken* und die *kleinsten oberen Schranken*, da diese den Wertebereich am besten einschränken.
  Diese Begriffe werden wird erst im Zusammenhang mit den *Folgen* weiter vertiefen.

und zusammen gilt:

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **beschränkt** $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ c, C \in \mathbb{R} : c \leq f(x) \leq C\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$$

4 Die Monotonie

Mit der *Monotonie* beschreiben wir das Steigungsverhalten der Funktion.
Wir unterscheiden dabei die folgenden Fälle:

Def.: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst
streng monoton steigend über [a,b] $:\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \text{ mit } x_1 < x_2 \ : \ f(x_1) < f(x_2)$$

d.h., dass beim Vergleichen zweier Funktionswerte und den zugehörigen Argumenten der kleiner Funktionswert auch zum kleineren Argument gehört.
Oder umgekehrt, dass zum grösseren Argument auch der grössere Funktionswert gehört.

Analog lässt sich definieren:

Def.: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst
streng monoton fallend über [a,b] $:\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \text{ mit } x_1 < x_2 \ : \ f(x_1) > f(x_2)$$

d.h., dass beim Vergleichen zweier Funktionswerte und den zugehörigen Argumenten der grössere Funktionswert zum kleineren Argument gehört.
Oder umgekehrt, dass zum grösseren Argument auch der kleinere Funktionswert gehört.

Bevor ich mich einigen Beispielen zuwende noch eine kleine Bemerkung:
Die Intervalle $[a, b]$ können auch offen oder halb-offen sein oder auch den ganzen Definitionsbereich der Funktion darstellen. Wichtig ist es, den Bereich zu kennen, über welchem die Funktion streng monoton verläuft.

Def.: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst
streng monoton über [a,b] $:\Leftrightarrow$ f ist streng monoton steigend *oder* streng monoton fallend über $[a, b]$

Ein uns *alt bekanntes* Beispiel ist die *affine Funktion* $f(x) = ax + b$.
Aufgrund unserer Erfahrung wissen wir, dass mit einem positiven linearen Koeffizienten der Graph streng monoton steigend ist. Das lässt sich nun auch über die Anschauung hinaus mathematisch beweisen:

Beweis: z.z.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2 \ : \ f(x_1) < f(x_2)$

Wir formen um, zu einer in der Allgemeinheit einfacher zu beweisenden Abschätzung grösser/kleiner Null:

$\Leftrightarrow \ \forall x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2 \ : \ f(x_1) - f(x_2) < 0$

Die Aussage hat zu gelten $\forall x_1, x_2 \dots$,
d.h., wir können zwei beliebige Elemente aus dem Definitionsbereich auswählen, mit der Eigenschaft $x_1 < x_2$ und untersuchen die Differenz $f(x_1) - f(x_2)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (ax_1 + b) - (ax_2 + b) \\ &= a(x_1 - x_2) \\ &< 0 \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $a > 0$ und $x_1 - x_2 < 0$ sind.
. $\square$

Aus den graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen lässt sich leicht erkennen, dass mit einem *negativen ungeraden Exponenten* die Funktion

- über $]0, \infty[$ *sm* $\searrow$ ist,
- über $]-\infty, 0[$ *sm* $\searrow$ ist,
- über $\mathcal{D}$ *nicht - sm* $\searrow$ ist.

Das *nicht*-streng monoton fallende Verhalten über dem Definitionsbereich ist einfach zu beweisen, da ein Gegenbeispiel ausreicht, um die geforderten Bedingungen der Definition zu widerlegen:

Beweis: Ich wähle $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$
und erfülle somit die Voraussetzung $x_1 < x_2$
aber nicht die geforderte Eigenschaft $f(x_1) > f(x_2)$:
$f(x_1) = (-1)^{-n} = -1 \ < \ 1 = 1^{-n} = f(x_2)$
. $\square$

Es lassen sich somit auch Funktionen auf ihr Monotoniverhalten hin untersuchen, *ohne* dass wir ihren Graphen kennen:

<u>Behauptung:</u> $f(x) = a^x$ ist streng monoton steigend, für $a > 1$

<u>Beweis:</u> z.z. ist: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ mit $x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
.
$$\Leftrightarrow \; f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a^{x_2} - a^{x_1} \\ &= a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) \\ &> a^{x_1}(1-1) \\ & \quad da\ a^{x_2-x_1} > 1, \text{ wegen } a > 1 \ \wedge \ (x_2 - x_1) > 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Noch zwei weitere Definitionen:

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst
monoton steigend über [a,b] $:\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \text{ mit } x_1 < x_2 \; : \; f(x_1) \leq f(x_2)$$

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst
monoton fallend über [a,b] $:\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \text{ mit } x_1 < x_2 \; : \; f(x_1) \geq f(x_2)$$

5 Die Symmetrien

Graphisch lässt eine Symmetrie dadurch erkennen, dass der Graph durch Spiegelung an einer Geraden oder einem Punkt auf sich selber abgebildet werden kann.
Schon bekannt ist die Symmetrie der quadratischen Funktion bzgl. der Geraden, die senkrecht zur x-Achse steht und durch den Scheitelpunkt geht.

Im Folgenden werde ich zwei allgemeine Symmetrien definieren:

Def.: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **symmetrisch bzgl. der y-Achse** $:\Leftrightarrow$

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$$

Aus den graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen lassen sich einfach die Symmetrien bzgl. der y-Achse erkennen:
Sie gelten bei den Potenzfunktionen mit geraden Exponenten.

Wie immer stellt sich auch hier die Frage nach der globalen Gültigkeit:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f(-x) &= (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = 1 \cdot x^n = x^n \\ \Rightarrow f(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

und zwar für alle x, da wir keine Einschränkungen bei der Wahl der Argumente gemacht haben.

Die Aussage ist also global wahr.

Def.:	Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **symmetrisch bzgl. dem Ursprung** $:\Leftrightarrow$ $$-f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$$

Aus den graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen lassen sich einfach die Symmetrien bzgl. des Ursprungs erkennen:
Sie gelten bei den Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten.

Wie immer, die Frage nach der globalen Gültigkeit:

$$\begin{array}{rcl} -f(x) & = & -x^n \\ f(-x) & = & (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = (-1) \cdot x^n = -x^n \\ \Rightarrow\ f(x) & = & f(-x) \end{array}$$

und zwar für alle x, da wir auch hier keine Einschränkungen bei der Wahl der Argumente gemacht haben.

Die Aussage ist also ebenfalls global wahr.

Die Definitionen ermöglichen auch wieder die Untersuchung auf Symmetrieeigenschaften ohne die Hilfe der graphischen Darstellung:

Behauptung: $f(x) = x^4 - 0.5x^3 - 4.5x^2 + 2x + 2$ ist symmetrisch zur y-Achse.

Beweis: z.z. ist: $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcc} f(x) & = & x^4 - 0.5x^3 - 4.5x^2 + 2x + 2 \\ f(-x) & = & (-x)^4 - 0.5(-x)^3 - 4.5(-x)^2 + 2(-x) + 2 \\ & = & x^4 + 0.5x^3 - 4.5x^2 - 2x + 2 \end{array}$$

…somit ist die Aussage falsch.

Abschliessend noch zwei Begriffe:

- Funktionen, welche symmetrische zur y-Achse verlaufen, heissen auch **gerade** Funktionen,
- Funktionen, welche symmetrische zum Ursprung verlaufen, heissen auch **ungerade** Funktionen.