Exponentielles Wachstum

ein Kurzreferat

Dies ist eine Beilage zum *Gruppen-SOL* - Projekt

Potenz- & Exponentialfunktionen

das 3. Referat

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

12. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Vorbereitend habt ihr die Formel für die *ZinsesZins - Berechnung* hergleitet:

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$$

welche ein klassisches Beispiel eines *exponentiellen Wachstumsprozesses* darstellt.

Das *exponentielle Wachstum* ist bekannterweise so definiert, dass

in gleich grossen (Zeit-)Intervallen sich der Funktionswert um den gleichen Faktor ändert.

In unserer Formel ist dieser Faktor $1 + \frac{p}{100}$, also die Basis einer Exponentialfunktion.
K_0 ist das sog. *Startkapital*, der Wert, mit welchem der ganze Prozess beginnt.

Im folgenden Referat werde ich die Situation verallgemeinern und ein Standartbeispiel vorstellen.

2 Der zugehörige Funktionstyp

Auf Grund unserer bisherigen Erfahrungen können wir für die Darstellung des exponentiellen Wachstums folgende Vermutung formulieren:

> *Die Funktionsgleichung für das exponentielle Wachstum und den exponentiellen Zerfall ist von der folgenden Form:*
>
> $$f(t) = a \cdot b^t$$

mit

- a = Startwert = $f(0)$
- b = Wachstumskoeffizient, *der die Stärke des Wachstums oder Zerfalls beschreibt.*
  Ein exponentieller Zerfall *ist auch möglich, dies aufgrund uns schon bekannter Eigenschaften einer Exponentialfunktion* $f(t) = b^t$*:*
  Wir wissen, dass $f(t)$ *mit* $b > 1$ *streng monoton wachsend ist, der Wert der Funktion also wächst,*
  und dass $f(t)$ *mit* $0 < ab < 1$ *streng monoton fallend ist, der Wert der Funktion also zerfällt.*
- *und* t *als Variable, da wir* zeitabhängige *Prozesse beschreiben.*

Wir wollen unsere Vermutung noch beweisen.
Dazu müssen wir verifizieren, dass der Funktionstyp exponentielles Verhalten aufweist:

$$\begin{aligned} Beweis: \quad f(t) &= a \cdot b^t \\ f(t+s) &= a \cdot b^{t+s} = ab^t \cdot b^s \\ \\ f(q) &= a \cdot b^q \\ f(q+s) &= a \cdot b^{q+s} = ab^q \cdot b^s \end{aligned}$$

$\square$

Wir haben somit gezeigt, dass egal wann wir beginnen (zum Zeitpunkt t oder q), und wir den Prozess während eines gleichlangen Zeitintervalls s weiterlaufen lassen, der Wert sich um den gleichen Faktor b^s ändert.

3 Beispiel

Da wir nun den Funktions*typ* kennen, der das exponentielle Wachstum beschreibt, lässt sich die Funktionsgleichung für den Prozess leicht bestimmen, denn um die zwei Unbekannten zu bestimmen brauchen wir nur zwei (voneinander unabhängige) Eigenschaften des Prozesses zu kennen.

Beispiel 3.1 Wir untersuchen eine Bakterienkultur, welche heute morgen um 08:00 aus 1000 Bakterien bestand und deren Anzahl sich jede Stunde verdoppelt.

1. Bestimme eine Funktionsgleichung, welche den Wachstumsprozess dieser Kultur beschreibt.

   Der Wachstumsprozess ist exponentiell, d.h. die Funktion, welche diesen Prozess beschreibt ist von der folgenden Form:

   $$f(t) = a \cdot b^t$$

   Wir beginnen unseren Prozess um 08:00,
   d.h. für uns ist $t = 0$ *um 08:00 und wir wollen die Stunde als unsere Einheit verwenden:*

   $$\begin{aligned} f(0) &= 1'000 \\ f(0) &= a \cdot b^0 = a \cdot 1 \\ &\Rightarrow a = 1'000 \end{aligned}$$

   Wir kennen die Situation 1 Stunde später:

   $$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1'000 \\ f(1) &= a \cdot b^1 \\ &\Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

   und können nun die zugehörige Funktionsgleichung bestimmen:

   $$f(t) = 1'000 \cdot 2^t$$

2. Bestimme die Anzahl Bakterien
   (a) um 12:00,
   das sind 4 Stunden später, also ist die Lösung: $f(4) = 16'000$
   (b) um 13:00, *das sind 5 Stunden später:* $f(5) = 32'000$
   (c) um 13:30: $f(5.5) = 45'256$
   (d) um 14:00: $f(6) = 64'000$

3. Wann hat die Bakterienkultur die 100'000er Grenze erreicht?

   Diese Frage lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben:

   $$f(t) = 100'000 \quad \Leftrightarrow \quad 1000 \cdot 2^t = 100'000$$

   also einer Exponentialgleichung, *welche wir mit unseren Kenntnissen aus der Algebra lösen können:* $t = 6.644std$
   Die Antwort lautet somit: 14:38:37.882

4. Wann bestand die Kultur
   (a) aus 750 Bakterien: $f(t) = 750 \ \Rightarrow t = -0.415$
   Das „ - “ in der Lösung bedeutet vor 0.415 Stunden, also bestand die Kultur um 07:35 aus 750 Bakterien
   (b) aus 500 Bakterien: $f(t) = 500 \ \Rightarrow t = -1$, *also um 07:00.*
   (c) aus 0 Bakterien: *Nie*

4 Abschliessende Bemerkungen

- **exponentielles Wachstum als Populationsmodell**

  Bevölkerungsentwicklungen werden gerne durch Exponentialfunktionen und somit auf der *Modellannahme* eines exponentiellen Wachstums beschrieben. Dass dieses Modell aber nur eine zeitlich begrenzte (sinnvolle) Gültigkeit haben kann, ist auf Grund der uns bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktionen klar: $f(t) = a^t$ ist nicht beschränkt.
  Um die Modelle zu verbessern müssen weitere natürliche Einflüsse berücksichtig werden:

  - Platzmangel
  - Nahrungsknappheit
  - Räuber - Beute - Modell
  - ...

  Die Berücksichtung weiterer Eigenschaften führt zu immer komplexeren Modellen, welche dann in der Handhabung nicht mehr so einfach sind. Wir sehen schon hier ein grundlegendes Problem in der Modellentwicklung: Das Abwägen der Handhabung gegenüber der Zuverlässigkeit.
  (mehr dazu in der AM oder den Anwendungen der Differential- & Integralrechnung)

- **exponentielles Wachstum als Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  Bei unseren Anwendungen des exponentiellen Wachstums müssen wir uns im klaren sein, dass wir immer ein bischen gemogelt haben:
  Sowohl bei der ZinsesZinsrechnung als auch beim Beispiel mit den Bakterien haben wir $\mathbb{R}$ als Definitions- & Wertebereich verwendet, obwohl eigentlich nur $\mathbb{N}$ bei den Bakterien oder Monate/ Tage/ Stunden bei der ZinsesZinsrechnung zulässig sind.
  Wir werden den Übergang zur *stetigen* Verzinsung noch speziell betrachten und dabei auch eine Definition der Euler'schen Zahl kennenlernen.