Potenz- & Exponentialfunktionen

ANALYSIS 4. Kapitel

ALLES - Gymnasiale Mittelstufe

Unterlagen zur Erarbeitung der Theorie
in einer *Gruppen-SOL - Umgebung*
mit *blended learning - Einheiten*

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

19. Dezember 2022

Die *QR* - Codes
zu den *Potenz- &*
Exponentialfunktionen
MNProfil *Gruppen-SOL*

zum aktuellen Skript

zur Homepage

zur Übersicht *Analysis*

zu den Potenz- & Exponentialfunktionen

zu den Aufgaben & Lösungen

Überblick über die bisherigen *ANALYSIS* - Themen:
(in den MNProfil-Versionen)

1 **Funktionen (Grundlagen)**

1.1 Einführung
1.2 Zuordnung & Abhängigkeit am Beispiel des Freien Falls
1.3 Weitere Beispiele
1.4 Funktionsgleichungen
1.5 Definitions- & Wertebereich, die Verknüpfung von Funktionen
1.6 Von der Funktionsgleichung zum Graphen
1.7 Funktionen & EXCEL
1.8 Ein Beispiel aus dem Aktienmarkt
1.9 Das Auffinden von Nullstellen -
ein interdisziplinäres Projekt mit der Informatik
1.10 Mengentheoretische Betrachtungen im & am Graphen
1.11 Funktionen & *GeoGebra* - ein *selbständiges* Kennenlernen

2 **Affine Funktionen**

2.1
- Die Einführung - *ein Leitprogramm*
- Ein Quiz

2.2 Die gegenseitige Lage affiner Funktionen
2.3 Abstandsbestimmungen
2.4 Wer kann's erklären ?
2.5 Funktionen & *GeoGebra* - ein *selbständiges* Kennenlernen

3 Quadratische Funktionen

3.1 Repetition
3.2 Der Graph einer quadratischen Funktion
ein Quiz
3.3 Der Mini-Maxi-Satz & Anwendungen
3.4 Die Symmetrieeigenschaft
3.5 Die geometrische Bedeutung der Parabel
3.6 Die quadratische Funktion und ihre Nullstellen
3.7 Eine Aufgabe

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

1 **Mengenlehre**

1.1 Die Menge im mathematischen Sinne

1.2 Die ganzen, rationalen und reellen Zahlen

1.3 Darstellungsformen

1.4 Teilmengen

1.5 Rechnen mit Mengen

1.6 Mengen im Koordinatensystem

1.7 Rechnen in Mengen

1.8 Die Symmetriegruppe

2 **Termumformungen**

2.1 Grundbegriffe

2.2 Einfache Beweisführungen in der Mathematik

2.3 Das Rechnen mit Polynomen

2.4 Das Rechnen mit Brüchen

Die Faktorzerlöegung von Polynomen 2. Grades
Die Trilogie einer Lernaufgabe

3 **Gleichungslehre**

3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen

3.2 Das Lösen von Gleichungen

3.3 Lineare Gleichungen & deren Diskussion
Die Mächtigkeit der Lösungsmenge - *eine Lernaufgabe*

3.4 Bruchgleichungen
Lösungsverfahren von Bruchgleichungen - *eine Lernaufgabe*

3.5 Quadratische Gleichungen

3.6 Textaufgaben - *Unterrichtspuzzle*
Textaufgaben - ein *Unterrichtspuzzle* mit Lösungsansätze

3.7 Noch einige Aufgaben

4 **Potenzen, Wurzeln & Logarithmen**

4.1 Einführung

4.2 Das Rechnen mit Potenzen

4.3 Potenzgleichungen

4.4 Der Logarithmus

4.5 Anwendungen

Überblick über die bisherigen *ICT & Informatik* - Themen:

- **GeoGebra**
  Die Grundlagen für den Einsatz von *GeoGebra*
  1. in der Geometrie,
  2. mit Funktionen.

- **Mathematica**
  Die Grundlagen werden weitgehend auf der Grundlage eines Skriptes von Thomas Unseld erarbeitet:
  1. Teil 1: Mathematica als Taschenrechner
  2. Teil 2: Graphische Darstellungen mit Mathematica
  3. Teil 3: Schleifen mit Mathematica

- eine schulinterne Einführung in die ICT und das Intranet.

Inhaltsverzeichnis

4 Potenz- & Exponentialfunktionen **1**
4.1 Überblick & Zielsetzung 1
4.2 Die Lernumgebung & Hilfsmittel 2
4.2.1 Lernumgebung 2
4.2.2 Gruppenarbeit 2
4.2.3 Gruppeneinteilung 2
4.2.4 Unsere Hilfsmittel 3
4.2.5 Zeitplan, M4e FS22 4
4.2.6 SOL & blended learning (20') 5
4.2.7 Adobe-Reader, Drawboard, OneNote, ... (20') 7
4.3 Kurze Repetition der Grundlagen (60') 8
4.3.1 Die Algebraischen Grundlagen (30') 9
4.3.2 Die Grundlagen aus der Analysis (30') 11
4.4 Die Neuen Funktionen (90') 13
4.4.1 Die Potenzfunktionen (15') 13
4.4.2 *Ein Referat:* Monotonie, Beschränktheit & Symmetrien (40') 19
4.4.3 Exponential- & Logarithmusfunktionen (40') 21
4.5 Die Umkehrfunktion (120') 26
4.5.1 *Ein kurzes Einstiegsreferat: Die mathematischen Grundlagen zur Umkehrfunktion* (10') 26
4.5.2 Die mathematischen Grundlagen selbständig erarbeitet (30') 27
4.5.3 Die geometrischen Grundlagen (40') 32
4.5.4 Aktuelle Stunde - *die Inverse* (45') 37
4.5.5 Affine & Quadratische Funktionen - eine Lernaufgabe zu deren Invertierbarkeit 39
4.5.6 Die Inversen spezieller Funktionstypen (5') 40
4.6 Wachstums- & Zerfallsprozesse (90') 43
4.6.1 Zinseszinsformel (40') 44
4.6.2 *Ein Kurzreferat:* Exponentielles Wachstum (20') 51
4.7 Repetition & Prüfungsvorbereitung 57
4.8 Weiterführende Populationsmodelle 58
4.8.1 Beschränktes & logistisches Wachstum 60
4.8.2 Vergiftetes Wachstum 66
4.8.3 Aufgaben zur Algorithmik 69
4.9 Von der jährlichen zur stetige Verzinsung und zur Zahl e 72
4.10 ***Meine*** Zusammenfassung 73

4 Potenz- & Exponentialfunktionen

4.1 Überblick & Zielsetzung

Wir werden in diesem Kapitel in einer *Gruppen-SOL* - Lernumgebung mit der Lernform *blended learning* zwei weitere Funktions*typen* kennenlernen:

Die Potenzfunktionen
Die Exponentialfunktionen

Als Einstieg werden wir uns mit den *Graphen* der Potenz- & Exponentialfunktionen beschäftigen und hierfür insbesondere *Mathematica* oder das freeware-Programm *GeoGebra* verwenden. Dabei werden wir uns mit Hilfe der graphischen Darstellung der Funktionen mit den Begriffen *Symmetrieeigenschaften*, *Monotonieverhalten* und *Beschränktheit* auseinandersetzen und diese auch verwenden, um uns weiter mit der mathematischen Schreibweise vertraut zu machen.
Weiter werden wir den Begriff *Umkehrfunktion/ Inverse* einführen und diskutieren.
In den Anwendungen werden wir uns mit dem *exponentiellen Wachstum* beschäftigen und abschliessend noch weitere Wachstumsmodelle diskutieren.

Die für dieses Kapitel speziell gewählte Umgebung und Lernform soll euch ermöglichen euren Lerntyp besser kennenzulernen. Ein Ziel ist, dass ihr zukünftig eure Lernumgebung euren persönlichen Preferenzen besser anpassen könnt, um eure Lernerfolge zu optimieren.

In der *Gruppenarbeit* sollt ihr eure Erfahrungen aus der Projektwoche umsetzen können und diese Form des Arbeiten noch besser kennenlernen.
Der *SOL-Charakter* soll euch die Möglichkeit bieten, euer persönliches Zeit- & Arbeitsmanagement zu entwickeln.
Das *blended learning* wird euch einen Einstieg in die Verwendung neuer, digitaler Medien im Unterricht öffnen und gibt euch die Möglichkeit, diese mit konservativen Lernformen zu vergleichen. Dieses Kapitel ist somit auch ein wichtiger Bestandteil meines Konzeptes zur *Digitalisierung des Unterrichts*.

Die *mathematischen Voraussetzungen* sind der sichere Umgang mit den *Grundlagen von Funktionen* und den *Potenzen, Wurzeln & Logarithmen*.
Im *digitalen Bereich* werden Grundkenntisse im Umgang mit *Mathematica & Funktionen* und *GeoGebra & Funktionen* vorausgesetzt.

4.2 Die Lernumgebung & Hilfsmittel

Wir werden, bevor wir zur eigentlichen Mathematik kommen, noch einige Punkte im Zusammenhang mit der speziellen Lernumgebung und den Hilfsmitteln besprechen und eventuelle Unklarheiten beseitigen:

4.2.1 Lernumgebung

4.2.2 Gruppenarbeit

4.2.3 Gruppeneinteilung

- Gruppengrösse: 3 - (max) 4 SchülerInnen
- Die Gruppen:
  - *Gruppe A:*
  - *Gruppe B:*
  - *Gruppe C:*
  - *Gruppe D:*
  - *Gruppe E:*
  - *Gruppe F:*

4.2.4 Unsere Hilfsmittel

- (persönlicher) Laptop
- Adobe-Reader, Drawboard, OneNote, oder anderes Gratistool zur Bearbeitung von PDF-files
- *GeoGebra*, *Mathematica*

- Für den digitalen Austausch können zur Anwendung kommen:
  - *Lernplattform*, für Foren & Chatraum,
  - *blogs* und meine $\mathcal{F}\&\mathcal{A}$ - Dokumente, insbesondere im Zusammenhang mit der Diskussion der Mitschriften und dem Austausch von Fragen,
  - *cloud*, für die orts- und zeitunabhängige Bearbeitung und das Austauschen von Dokumenten,
  - *meine homepage*
  -

  - Für Fragen (und deren Beantwortung) während den Phasen selbständigen Lernens *wählt ihr* eure Umgebung.
    Im Rahmen des auf der nächsten Seite aufgestellten *Zeitplans* wird die von euch gewählte Umgebung zu den entsprechenden Themen auch von mir gelesen und wenn nötig mit Hinweisen oder Lösungen ergänzt. Ausserhalb des Zeitplans seit ihr als Gruppe selber für die Behandlung der Fragen alleine verantwortlich.
    Ganz wichtig: Das ist der einzige eurer digitalen Bereiche, den ich, und auch nur im angegebenen Zeitrahmen, betreten werde.

  - Ihr seid für den Unterhalt der digitalen Umgebungen selber zuständig, Wir brauchen somit noch *Verantwortliche* und natürlich die Links für
    * das Forum:
    * den Chatraum:
    * weitere Wünsche ...

4.2.5 Zeitplan, M4e FS22

- **B**earbeitungs**F**ormen & - **D**auer (**BFD**) einzelner Kapitel werden angegeben, (Richtgrössen)
- Für die Arbeiten stehen euch die MH-Unterrichtsstunden zur Verfügung und natürlich die Möglichkeit, die Arbeit als Hausaufgaben zu erledigen.
- *Milestones:*
  - *Einleitung* Mo. 28. Februar
  - *Referat: Monotonie, Beschränktheit & Symmetrie* Mo. 7. März
  - *Kurzreferat: Die Idee der Umkehrfunktion* als Video, verfügbar ab Mo. 7. März
  - *Aktuelle Stunde: die Inverse* Fr. 11. März
  - *Kurzreferat: Exponentielles Wachstum* Di. 15. März
- **Prüfung 1:**
  - Datum: 4. März 2022
  - Thema: Repetition der Grundlagen
  - Hilfsmittel: keine
  - Gewichtung: gehört zu den 30min Prüfungen
  - Form: Einzelprüfung
- **Prüfung 2:**
  - Datum: 18. März 2022
  - Thema: Potenz- & Exponentialfunktionen
  - Hilfsmittel: kleiner TR
  - Gewichtung: gehört zu den 30min Prüfungen
  - Form: Gruppenprüfung
- Information der Eltern: ...

4.2.6 SOL & blended learning (20')

Aufgaben 4.1 *Informiert euch im Internet, um was es beim* blended learning *und beim* SOL *geht und tragt die zentralen Begriffe zusammen.*

(**BFD:** *individuelle Internetsuche, Gruppendiskussion, Abschluss im Plenum* 10' + 5' + 5' = 20')

Was gilt es grundsätzlich bei Internetrecherchen zu beachten?

Aufgaben 4.2 *Formuliere deine* persönlichen Ziele und Erwartungen*, welche du in diesem Unterrichtsprojekt erreichen und sammeln willst.*

4.2.7 Adobe-Reader, Drawboard, OneNote, ... (20')

Aufgaben 4.3 *Installiert den Adobe-Reader, Drawboard OneNote oder ein sonst euch vertrautes Gratistool zur Bearbeitung von PDF's auf eurem Laptop und bearbeitet als Übung das folgende Dokument:*

http://www.ahochschuldidaktikaz.uzh.ch/...

(**BFD:** *Gruppenarbeit* : 20')

Unklarheiten und Probleme im Umgang mit eurem PDF-Bearbeitungstool könnt ihr in eurer Lernumgebung posten.
Wo ihr natürlich auch Problemlösungen anbieten könnt.

Ab jetzt sollt ihr dieses Dokument ausschliesslich *digital bearbeiten*, d.h.: ergänzt dieses Dokument digital

- mit euren Bemerkungen & Ergänzungen,
- mit *extern* erstellten oder bearbeiteten Dokumenten.

Aufgaben 4.4 *Für alle diejenigen, welche es nicht schon bereits gemacht haben:*
Ergänzt digital das Skript mit euren noch auf Papier gemachten Bemerkungen zur Lernumgebung, Gruppenarbeit und zum blended learning und mit dem bearbeiteten Dokument zu Hochschuldidaktik (Gruppenarbeit) und vergesst nicht eure persönlichen Ziele und Erwartungen.

4.3 Kurze Repetition der Grundlagen (60')

Den *algebraischen Hintergrund* haben wir in

ALGEBRA Kapitel 4:
Potenzen, Wurzeln & Logarithmen

schon kennengelernt.

Ebenfalls kennen wir schon den *anlytischen Hintergrund*, den wir uns in

ANALYSIS Kapitel 1:
Funktionen (Grundlagen)

erarbeitet haben.

d.h. eine *kurze* Repetition für den Einstieg wird ausreichend sein.

Aus aktuellen Anlass sollte eine Repetition der *digitalen Kenntnisse* nicht nötig sein.

Informatik & ICT ...

4.3.1 Die Algebraischen Grundlagen (30')

Aufgaben 4.5 *Fasst die wichtigsten Begriffe & Beziehungen zu* Potenzen, Wurzeln & Logarithmen *zusammen:*
*(***BFD:** Gruppe, Brainstorming *: 3')*

Vertieft und erklärt eure Begriffe:
*(***BFD:** Gruppenarbeit *: 10')*

Aufgaben 4.6 *Löst die folgenden Aufgaben:*
*(**BFD:** Gruppenarbeit : 15')*

1. *Vereinfache:*

   (a) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n \left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{3n}$

   (b) $(n+1)\log_a x - \dfrac{1}{3}\log_a(x^{6n})$

2. *Wo liegt der Fehler:*
   Behauptung.: *Alle geraden Zahlen sind Null.*
   Beweis :
   $$\begin{array}{rrcl} & (-1)^{2n} & = & n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & \ln(-1)^{2n} & = & \ln 1 \\ \Leftrightarrow & 2n \cdot \ln(-1) & = & 0 \\ \Rightarrow & 2n & = & 0 \end{array}$$

3. *Bestimme die Lösungsmengen:*

   (a) $5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x-1} = 1000 + 9 \cdot 5^x$

   (b) $e^{2x+1} - 3e^{x+2} = 12$

   (c) $\log x + \log(x-3) = 1$

Lösungen:

1. (a) $(-1)^n \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2n} = (-1)^n \left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^{2n}$
   (b) $\log_a(x^{1-n})$
2. ...
3. (a) $\mathbb{L} = \{2.585\}$
   (b) $\mathbb{L} = \{2.159\}$
   (c) $\mathbb{L} = \{5\}$

4.3.2 Die Grundlagen aus der Analysis (30')

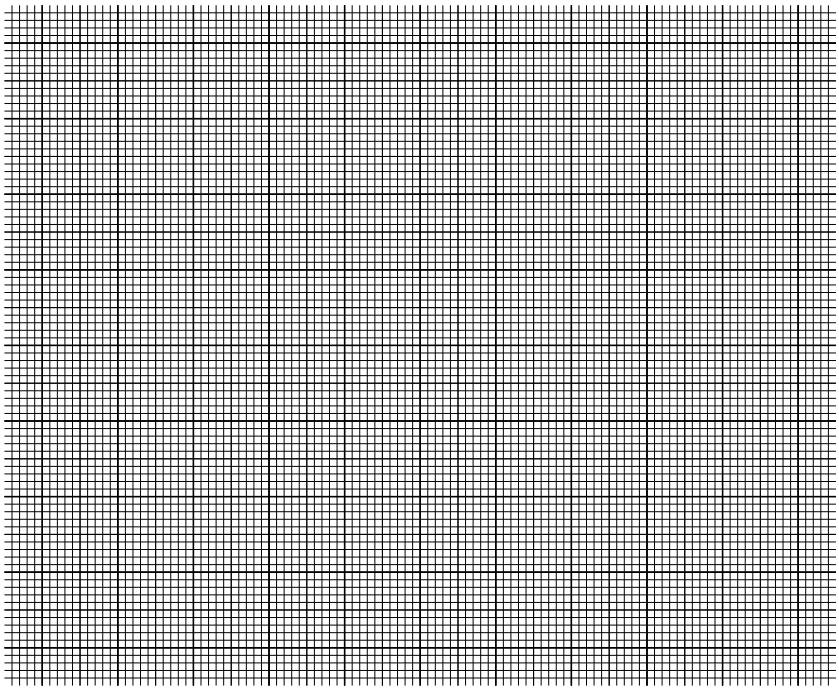
Aufgaben 4.7 *Die wichtigsten Begriffe & Beziehungen zu den* Funktionen (Grundlagen)
*(***BFD:** Gruppe, Brainstorming *: 3')*

Vertieft und erklärt eure Begriffe:
*(***BFD:** Gruppenarbeit *: 10')*

Aufgaben 4.8 *Am Beispiel einer* quadratischen Funktion *wollen wir unsere Grundlagen zur Anwendung bringen:*

Bestimme die Funktionsgleichung einer beliebigen quadratischen Funktion $f(x) = \ldots$

1. *Stelle* $f(x)$ *graphisch dar* *und*
2. *bestimme weiter* ...
   (a) *die Nullstellen und den Achsenabschnitt,*
   (b) *das Minimum und das Maximum,*
   (c) $\{x \in \mathcal{D}(f) \mid f(x) > 0\}$,
   (d) $\{y \in \mathcal{W}(f) \mid x \in]-1, 2]\}$,
   (e) $\{(x/y) \mid y = f(x)\}$.



Löse die Aufgabe "von Hand" und kontrolliere deine Resultate mit *Mathematica / GeoGebra*.

(**BFD:** *Gruppenarbeit* : 15')

4.4 Die Neuen Funktionen (90')

In diesem Kapitel werdet ihr

- die neuen *Funktionstypen* kennenlernen und
- den *Einfluss der Parameter* auf die Graphen untersuchen.

4.4.1 Die Potenzfunktionen (15')

Def.: Eine Funktion $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathcal{W}(f) \subset \mathbb{R}$ heisst eine **Potenzfunktion** $:\Leftrightarrow f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R}$.

Für die Untersuchung der Graphen unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1. *Natürlicher Exponent* $\Rightarrow f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \begin{cases} n \text{ gerade,} \\ n \text{ ungerade.} \end{cases}$
2. *Negativer Exponent* $\Rightarrow f(x) = x^{-n},\ n \in \mathbb{N} \begin{cases} n \text{ gerade,} \\ n \text{ ungerade.} \end{cases}$
3. *Rationaler Exponent* $\Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}$

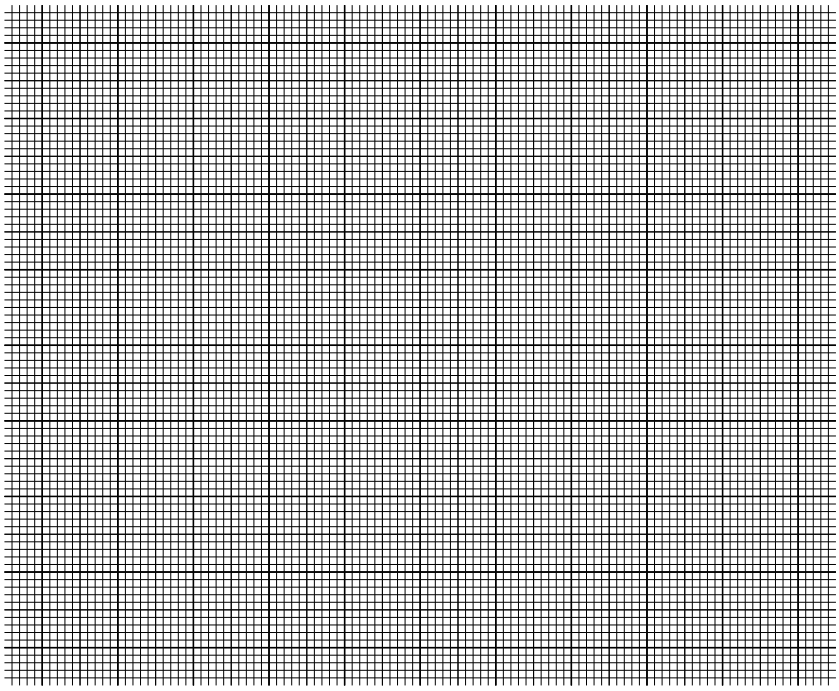
Aufgaben 4.9 *Untersucht und beschreibt den Verlauf der zugehörigen Graphen mit Hilfe von* Mathematica / GeoGebra.
*(**BFD:** Gruppenarbeit : 15')*

Hinweise:

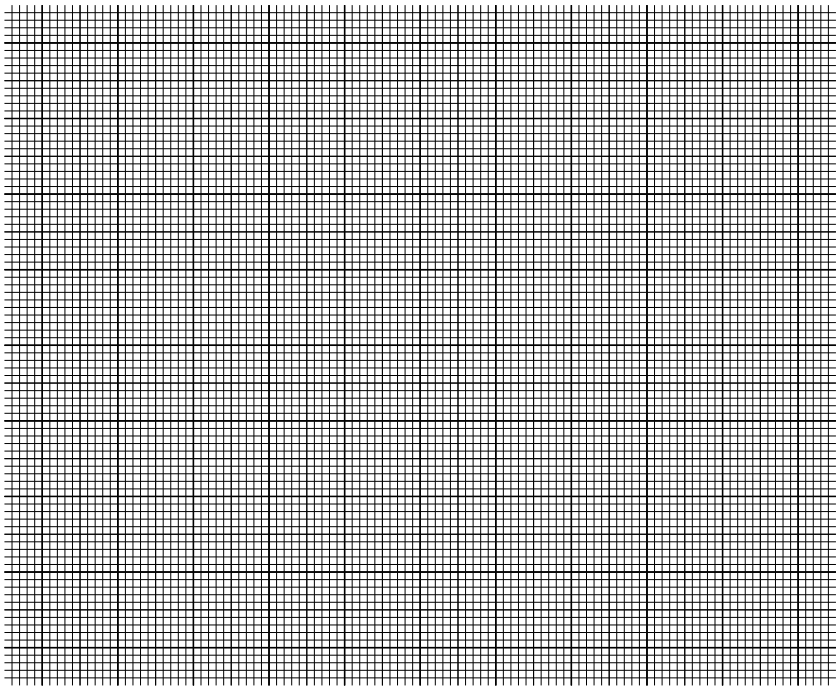
- Unterscheide in den Fällen 1. & 2. jeweils *gerade* und *ungerade*.
- Wähle zuerst eigene konkrete (Zahlen-)Beispiele für den jeweiligen Funktionstyp um den Einfluss der Parameter (in diesem Fall des Exponenten) zu untersuchen.
- Kontrolliere deine Vermutung anschliessend mit der Definition eines Schiebereglers ($\Delta x = 2$).
- Vergleiche im 3. Fall jeweils $x^{1/n}$ mit x^n.

- Nicht vergessen:
  Auch graphische Darstellungen lassen sich digital in das Skript einfügen.

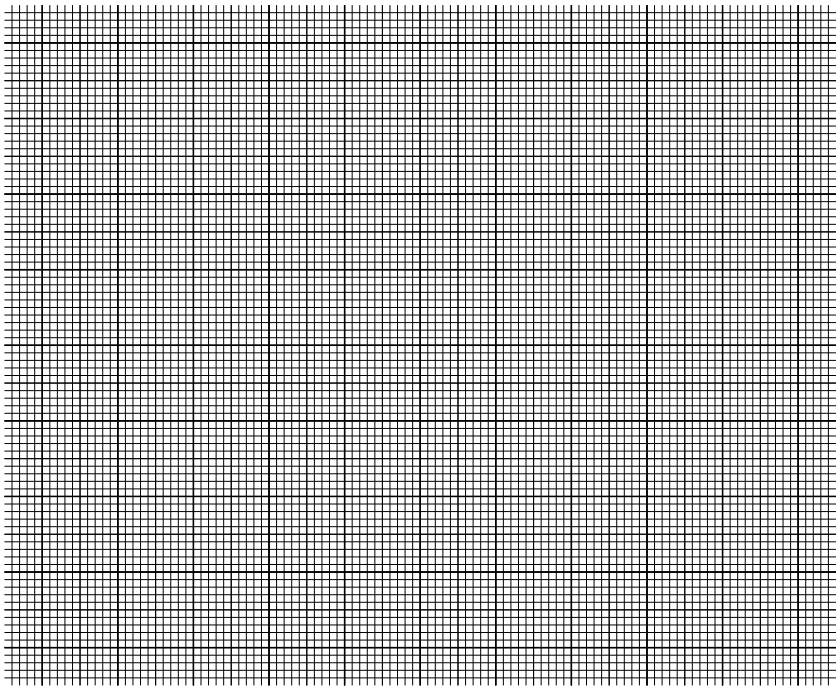
1. Fall (a): *Natürlicher gerader Exponent*



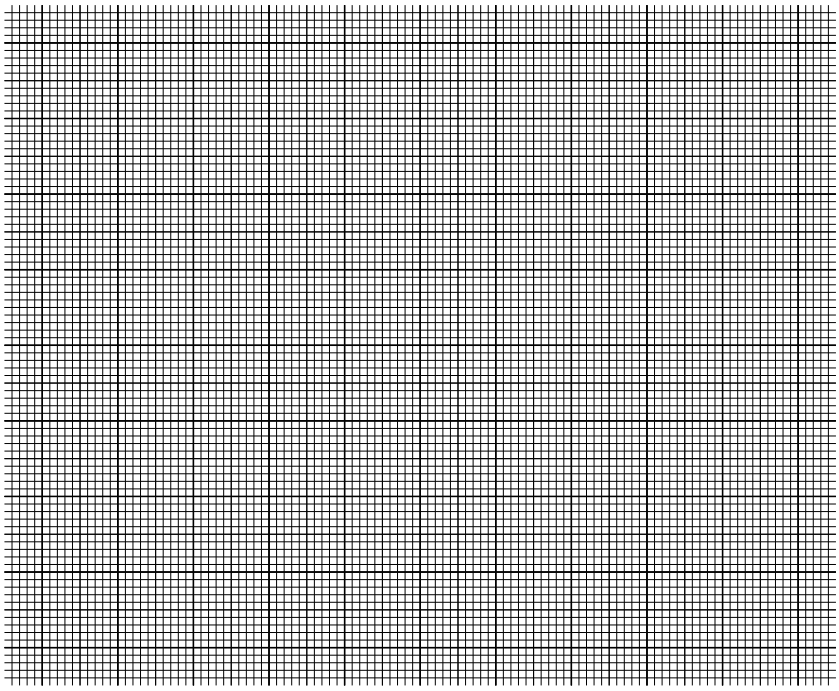
1. Fall (b): *Natürlicher ungerader Exponent*



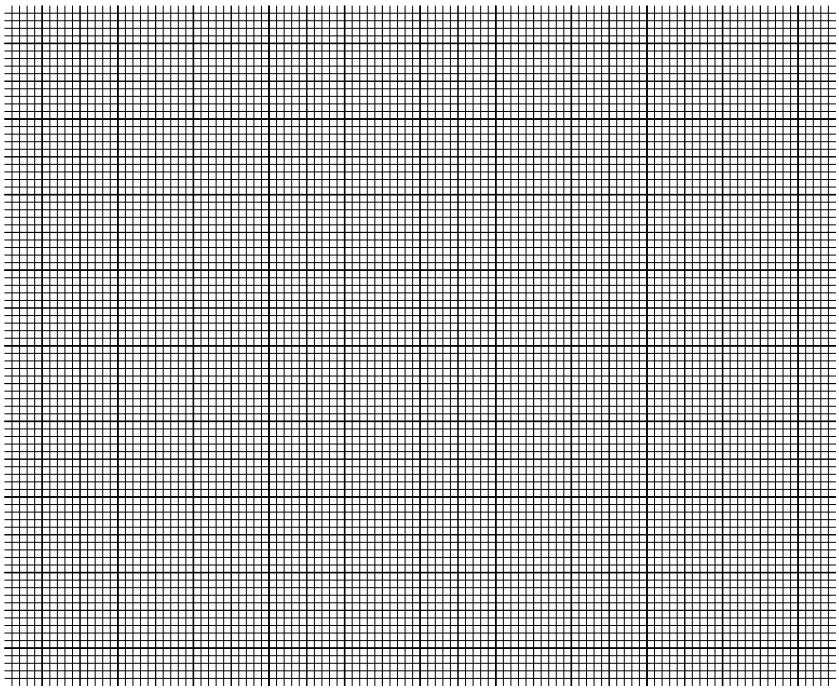
2. Fall (a): *Negativer gerader Exponent*



2. Fall (b): *Negativer ungerader Exponent*



3. Fall: *Rationaler Exponent*



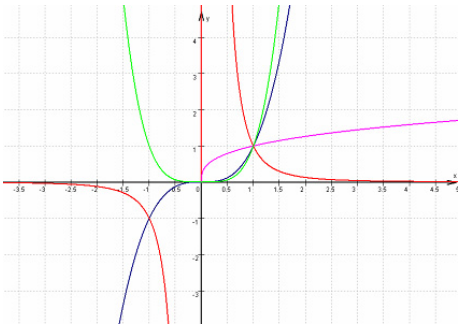
4.4.2 *Ein Referat:* Monotonie, Beschränktheit & Symmetrien (40')

aus **Analysis-Aufgaben:** *Potenz- & Exponentialfunktionen 1*

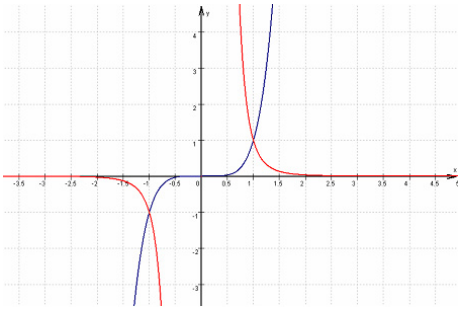
zugehörige Lösungen

1. Ordne den Graphen die Funktionsgleichung zu:

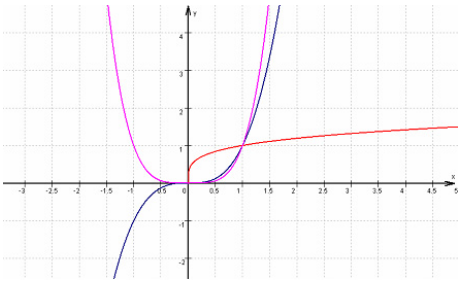
(a)
i. $f(x) = x^3$
ii. $g(x) = x^{-3}$
iii. $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$



(b)
i. $f(x) = x^4$
ii. $g(x) = x^5$
iii. $h(x) = x^6$



(c)
i. $f(x) = x^4$
ii. $g(x) = x^{0,25}$
iii. $h(x) = x^5$



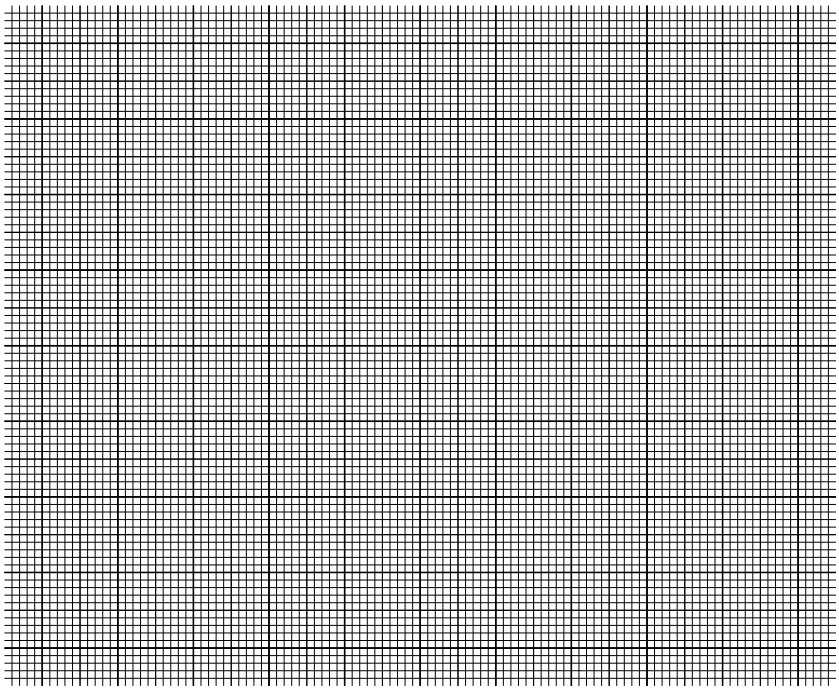
2. Untersuche den Einfluss des Parameteres n auf den folgenden Funktionstyp:

$$f(x) = (x + n)^4$$

4.4.3 Exponential- & Logarithmusfunktionen (40')

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathcal{W}(f) \subset \mathbb{R}$ heisst eine **Exponentialfunktion** $:\Leftrightarrow\ f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \{1\}$.

Aufgaben 4.10 *Untersuche graphisch den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des zugehörigen Graphens und diskutiere das Symmetrie- und Monotonieverhalten und die Beschränktheit.*
*(**<u>BFD:</u>** Gruppenarbeit : 20')*



Mit Hilfe der obigen Diskussion lassen sich nun Definitions- und Wertebereich genauer spezifizieren:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{W}(f) = \mathbb{R}_{>0}$

Verifiziert die folgenden Behauptungen an euren graphischen Darstellungen und arbeitet die Beweise durch. (Ein *Nachvollziehen, mit gelegentlichen Ergänzungen* sollte möglich sein.)

<u>Behauptung:</u> Die Exponentialfunktion ist nicht symmetrisch bzgl. der y-Achse.

<u>Beweis:</u>
$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & a^x \\ f(-x) & = & a^{-x} \quad = \quad \frac{1}{a^x} \end{array}\right\} \neq \quad \square$$

<u>Behauptung:</u> $f(x) = a^x$ ist streng monoton steigend, für $a > 1$

<u>Beweis:</u> z.z. ist: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ mit $x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
. $\Leftrightarrow \; f(x_2) - f(x_1) > 0$

$$\begin{array}{rcl} f(x_2) - f(x_1) & = & a^{x_2} - a^{x_1} \\ & = & a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) \\ & > & a^{x_1}(1 - 1) \\ & & da\ a^{x_2 - x_1} > 1, \text{ wegen } a > 1 \ \wedge \ (x_2 - x_1) > 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

$\square$

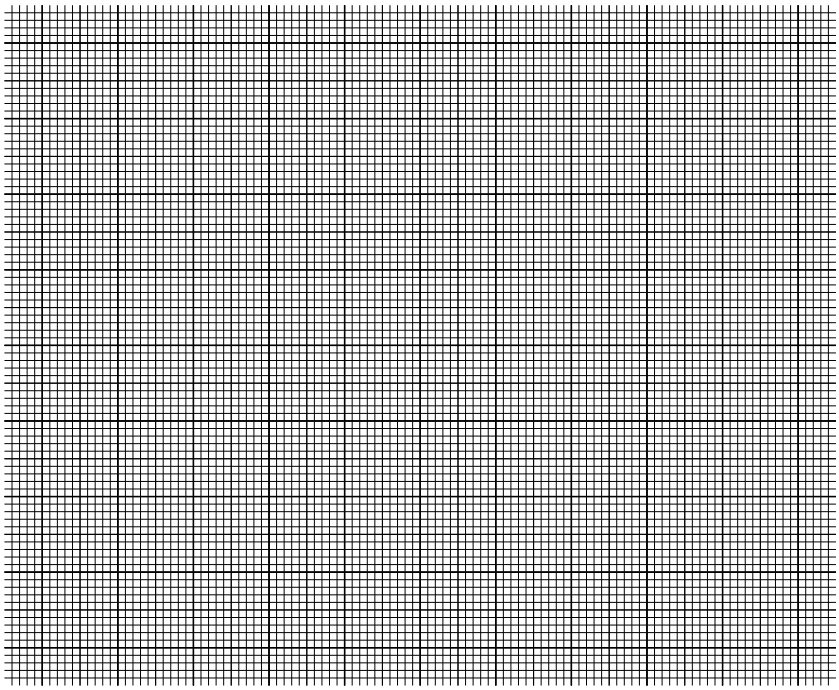
Aufgaben 4.11 *Beweise selbständig*

- *das Monotonieverhalten für $a < 1$,*
- *die fehlende Symmetrie zum Ursprung.*

Poste deine Lösung und/oder vergleiche mit den Lösungen deiner MitschülerInnen.

Def.:	Eine Funktion $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathcal{W}(f) \subset \mathbb{R}$ heisst eine **Logarithmusfunktion** $:\Leftrightarrow\ f(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \{1\}$.

Aufgaben 4.12 *Untersuche graphisch den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des zugehörigen Graphens und diskutiere das Symmetrie- und Monotonieverhalten und die Beschränktheit.*
*(**BFD:** Gruppenarbeit : 20')*



Mit Hilfe der obigen Diskussion lassen sich auch hier Definitions- und Wertebereich genauer spezifizieren:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_{>0}$
$\mathcal{W}(f) = \mathbb{R}$

Verifiziert die folgenden Behauptungen an euren graphischen Darstellungen und arbeitet die Beweise durch. (Ein *Nachvollziehen, mit gelegentlichen Ergänzungen* sollte möglich sein.)

<u>Behauptung:</u> Die Logarithmusfunktion ist nicht symmetrisch bzgl. dem Ursprung.

<u>Beweis:</u> $f(x)$ ist für negative Argumente nicht definiert.
. $\square$

<u>Behauptung:</u> $f(x) = \log_a x$ ist streng monoton fallend, für $a < 1$

<u>Beweis:</u> z.z. ist: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ mit $x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$
. $\Leftrightarrow \; f(x_1) - f(x_2) > 0$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \log_a(\frac{x_1}{x_2}) =: q \\ \Leftrightarrow \quad a^q &= \frac{x_1}{x_2} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad q &> 0 \;, \quad \text{für } a < 1 \end{aligned}$$

$\square$

Aufgaben 4.13 *Beweise selbständig*

- *das Monotonieverhalten für $a > 1$,*
- *die fehlende Symmetrie zur y-Achse.*

Poste deine Lösung und/oder vergleiche wieder mit den Lösungen deiner MitschülerInnen.

aus **Analysis-Aufgaben:** *Potenz- & Exponentialfunktionen 2*

zugehörige Lösungen

1. Untersuche den Einfluss der Parameter a und b auf den folgenden Funktionstyp:
$$f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}\ , \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$$

2. Untersuche den graphischen Zusammenhang zwischen

   den Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ und
   den Logarithmusfunktionen $g(x) = \log_a x\ , \forall a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$.

3. (a) Beweise, dass $f(x) = 2.4^x$ streng monoton steigend ist.
   Verwende die folgende Definition:

   Eine Funktion f ist streng monoton steigend $:\Leftrightarrow$
   $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ mit $x_1 > x_2 : f(x_1) > f(x_2)$

   (b) Beweise, dass $f(x) = \log_{0.5} x$ streng monoton fallend ist.
   Verwende die folgende Definition:

   Eine Funktion f ist streng monoton fallend $:\Leftrightarrow$
   $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ mit $x_1 > x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

   Hinweis:
   Beweise analog zu den Beispielen in der Theorie und nicht unter Verwendung der Aussagen in der Theorie.

4.5 Die Umkehrfunktion (120')

4.5.1 *Ein kurzes Einstiegsreferat: Die mathematischen Grundlagen zur Umkehrfunktion* (10')

4.5.2 Die mathematischen Grundlagen selbständig erarbeitet (30')

Das Ziel ist, den Begriff der Inversen zu definieren und die mathematische Bedeutung und zugehörige Beispiele kennenzulernen.
Wir haben in den Anwendungen der Trigonometrie schon mehrfach mit *Umkehrfunktionen (= Inversen)* gearbeitet:

$$\arcsin x = \sin^{-1} x,\ \arctan x = \tan^{-1} x,\ \arccos x = \cos^{-1} x$$

Im Folgenden wollen wir den *mathematischen* und *geometrischen* Hintergrund der Umkehrfunktionen genauer untersuchen.

Def.:	Wir gehen von einer beliebigen Funktion $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ aus. Die **Inverse zu** f ist die Funktion $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, die jedem Funktionswert von f dessen ursprüngliches Argument zuordnet.

Beachte,

- dass wir in der Definition ausführlich verlangen, dass die Inverse eine Funktion ist,
- dass die Aussage, dass die Inverse g „*jedem Funktionswert von f dessen ursprüngliches Argument zuordnet*“ folgendes bedeutet:

$$f(x) \overset{g}{\mapsto} x$$

$$\Leftrightarrow \quad g(f(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad g \circ f(x) = x$$

Beispiel 4.1 Wir gehen von der folgenden Funktion aus:

$$f : \{2, 4, 6, 8, 10\} \to \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

mit der gegebenen Funktionsvorschrift:

$$2 \overset{f}{\mapsto} 1 \ , \ 4 \overset{f}{\mapsto} 3 \ , \ 6 \overset{f}{\mapsto} 7 \ , \ 8 \overset{f}{\mapsto} 5 \ , \ 10 \overset{f}{\mapsto} 9$$

Dann gilt für die zugehörige Umkehrfunktion g

$$g : \{1, 3, 5, 7, 9\} \to \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

die folgende Funktionsvorschrift:

$$1 \overset{g}{\mapsto} 2 \ , \ 3 \overset{g}{\mapsto} 4 \ , \ 5 \overset{g}{\mapsto} 8 \ , \ 7 \overset{g}{\mapsto} 6 \ , \ 9 \overset{g}{\mapsto} 10$$

Beachte, dass für den Definitions- & Wertebereich der Umkehrfunktion folgendes gilt:

$$\mathcal{D}(g) = \mathcal{W}(f) \ , \ \mathcal{W}(g) = \mathcal{D}(f)$$

Aufgaben 4.14 *Fülle die Textlücken:*

Wir gehen von der folgenden Funktion aus:

$$h : \{-1, 0, a, t\} \to \{a, b, 1, 0\}$$

mit der gegebenen Funktionsvorschrift:

$$-1 \overset{h}{\mapsto} a \ , \ 0 \overset{h}{\mapsto} 0 \ , \ a \overset{h}{\mapsto} b \ , \ t \overset{h}{\mapsto} 1$$

Dann gilt für die zugehörige Umkehrfunktion i

$$i : \{ \ \ldots\ldots \ \} \to \{ \ \ldots\ldots \ \}$$

die folgende Funktionsvorschrift:

$$a \overset{i}{\mapsto} -1 \ , \ b \overset{i}{\mapsto} \ldots \ , \ \ldots \overset{i}{\mapsto} t \ , \ 0 \overset{i}{\mapsto} \ldots$$

<u>*Bem.:*</u>

- Die Inverse von f wird, wie schon in der Einleitung bemerkt, auch die **Umkehrfunktion** zu f genannt.
- Als Schreibweise für *die Umkehrfunktion von f* verwenden wir f^{-1}.
  <u>Beachte:</u> $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$
- Die Inverse f^{-1} ist nach Definition auch eine *Funktion* und erfüllt somit insbesondere auch die allgemeinen Eigenschaften einer Funktion, d.h:

  $f^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ ist eine ..... , die jedem ..... aus $\mathbb{B}$ ..... ein ..... in $\mathbb{A}$ ..... .

Aufgaben 4.15 *Definiert selber eine Funktionsvorschrift für h, mit den folgenden Definitions- und Wertebereichen*

$$h : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{-3, 1, 33, 0.5, t\}$$

und bestimmt anschliessend die zugehörige Inverse mit der zugehörigen Funktionsvorschrift.

Wir wollen nun noch den Begriff der *Umkehrfunktion/Inversen* kurz und elegant in der mathematischen Schreibweise definieren:

Def.:	Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ eine beliebige Funktion. $\Rightarrow\ f^{-1} : B \to A$ mit $f^{-1} \circ f(x) \ = \ f \circ f^{-1}(x) \ = x$ heisst die zu f **Inverse**.

Bem.:

- Die Verknüpfung der Inversen mit der ursprünglichen Funktion ist somit eine sog. *identische Abbildung*. D.h., dass das Argument dieser Verknüpfung auf sich selber abgebildet wird, oder anders ausgedrückt, dass der Funktionswert immer gleich dem Argument ist:

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

- Die Definition gilt nur, wenn die Inverse auch existiert!
  Die Existenz der Inversen werden wir an späteren Beispielen noch ausführlich diskutieren.

- Warum wird in der Definition die Gleichung

$$f^{-1} \circ f(x) \ = \ f \circ f^{-1}(x)$$

  gefordert ?

Wir wollen uns zum Abschluss der Einführung der mathematischen Grundlagen noch einige uns schon bekannte Umkehrfunktionen betrachten:
(Beachte: Wir werden auch in den folgenden Beispielen den Definitionsbereich der Inversen *noch nicht* berücksichtigen. Diesen wichtigen Aspekt werden wir in den geometrischen Betrachtungen im Koordinatensystem noch gemeinsam diskutieren!)

Funktion	**Umkehrfunktion**	Begründung
$\sin x$	$\sin^{-1} x$	denn z.B. gilt: $\sin 45^0 = \sqrt{2}/2$ $\sin^{-1}(\sqrt{2}/2) = 45^0$
$\cos x$	$\cos^{-1} x$	denn z.B. gilt: $\cos(\pi/3) = \ldots$ $\cos^{-1}(\ldots) = \pi/3$
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	denn z.B. gilt: $f(1.2) = \ldots$ $f^{-1}(\ldots\ldots) = \ldots$
$\ln x$	e^x	denn z.B. gilt: $e^{\ln 7} = \ldots$ $\ln \ldots = 7$ hier gilt sogar allg.: $e^{\ln x} = x$
e^x	$\ln x$	denn allg. gilt: $\ln(e^x) = x$
a^x	$\ldots$	denn allg. gilt: $\log_a a^x = x$
$\log_a x$	$\ldots$	denn allg. gilt:

4.5.3 Die geometrischen Grundlagen (40')

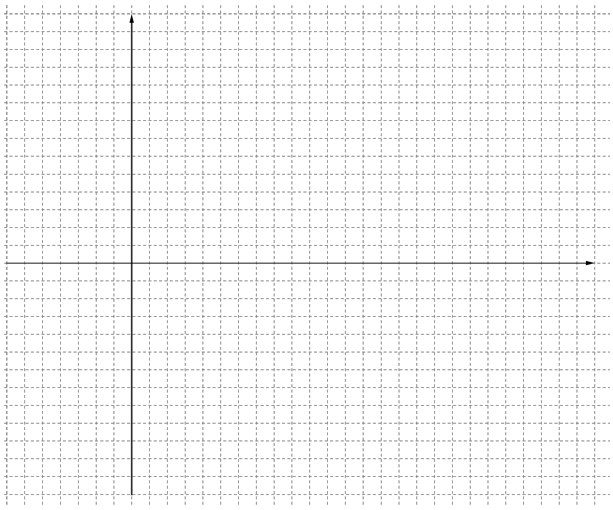
Wir verwenden als einführendes Beispiel die folgende affine Funktion

$$f(x) = 0.5x + 2$$

mit der zugehörigen Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)								

- Übertragt eure Werte in das Koordinatensystem und ergänzt die Punkte zum Graphen von f



- Ergänzt die graphisch Darstellung mit der Geraden $y = x$

- Ergänzt die graphische Darstellung mit Punkten des Graphen der zugehörige Umkehrfunktion f^{-1} (diese lassen sich aus der obigen Wertetabelle ablesen !) und ergänzt die Punkte zum Graphen von f^{-1}.

- Was fällt auf?

Geometrisch lässt sich aus dem Vergleich von $graph(f)$ mit $graph(f^{-1})$ feststellen, dass die Umkehrfunktion durch die Spiegelung der Funktion an der Geraden $y = x$ entsteht.

Daraus lässt sich auch unmittelbar schliessen, dass die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion die ursprüngliche Funktion ist:

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = f(x) \quad \text{oder} \quad f^{-1} \circ f^{-1}(x) = f(x)$$

Insbesondere folgt auch, dass die Inverse einer affinen Funktion wieder eine affine Funktion ist und deren Funktionsgleichung ihr bestimmen könnt und jetzt auch müsst: ...
(<u>Hinweis:</u> Verwende, dass du zwei Punkte auf dem Graphen der Inversen kennst.)

Aufgaben 4.16 *Verifiziere mit* GeoGebra

Eine *weitere* Methode zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Inversen:

Die Eigenschaften der Inversen ermöglichen uns auch eine direkte Bestimmung der Funktionsgleichung durch algebraische Umformungen. Dazu muss nur die Funktionsgleichung $f(x) = y$ nach x aufgelöst ...

$$\begin{aligned} f(x) = 0.5x + 2 &= y \\ \Leftrightarrow \qquad x &= 2y - 4 \end{aligned}$$

... und um das gleiche Koordinatensystem verwenden zu können, noch die Variablen angepasst werden:

$$\Rightarrow \; f^{-1}(x) = 2x - 4$$

Eine Kontrolle des Resultates erfolgt über die Verifikation der Definition. Dazu musst du $f \circ f^{-1}(x)$ ausrechnen und solltest was erhalten ?

Mach es !

Da die Verknüpfung zweier Funktion im Allgemeinen nicht-kommutativ ist gehört zu einer vollständigen Verifikation noch ...

Aufgaben 4.17 *Wir betrachten die folgenden Funktionen:*

$$a(x) = 2x - 3 \ , \ b(x) = -0.25x + 2 \ , \ c(x) = -2$$

1. *Stelle die gegebenen Funktionen und die zugehörigen Inversen graphisch dar.*
2. *Bestimme die Funktionsgleichung der jeweils zugehörigen Inversen.*

Aufgaben 4.18 *Bestimme die Inverse zu* $r(t) = at + b$

Diese Aufgabe ist als Vorbereitung für die nächste Unterrichtsstunde im Plenum gedacht. Die Lösungen bitte mitbringen.

Aufgaben 4.19 *Wir verwenden dazu die folgende Funktion:*

$$h(x) = (x-2) \cdot e^{0.25x}$$

- *Erstellt eine Wertetabelle über folgendem Definitionsbereich: -24, - 22, -20, . . . 0, 2, 4.*
- *Stellt die Funktion graphisch dar.*
  Mit GeoGebra *lautet die Eingabe:*
  $h(x) = (x-2) * exp(0.25x)$
- *Konstruiere die "Inverse" - Was fällt auf ?*
- *Bringt eure Skizze in den Unterricht!*

4.5.4 Aktuelle Stunde - *die Inverse* (45')

Eine Diskussionsrunde im Plenum zum aktuellen Thema der *Umkehrfunktion/ Inversen* ...

Beispiel 4.2 Ein ausführliches Beispiel zur Diskussion der Invertierbarkeit einer quadratischen Funktion:

Wir verwenden hierfür: $f(x) = x^2 + 2x + 3$

- Skizziere den Graphen von f,
- Konstruiere den Verlauf der zugehörigen "Umkehrfunktion",
- Bestimme die Funktionsgleichung von f^{-1} mit Angabe der Definitions- und Wertebereiche.

4.5.5 Affine & Quadratische Funktionen - eine Lernaufgabe zu deren Invertierbarkeit

Affine Funktionen, Quadratische Funktionen und die Invertierbarkeit

eine etwas längere Aufgabe mit
vielen Selbstkontrollmöglichkeiten

für die gymnasiale Oberstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

10. Februar 2021

4.5.6 Die Inversen spezieller Funktionstypen (5')

Aufgaben 4.20 *Untersucht die folgenden Funktionstypen auf ihre Invertierbarkeit:*

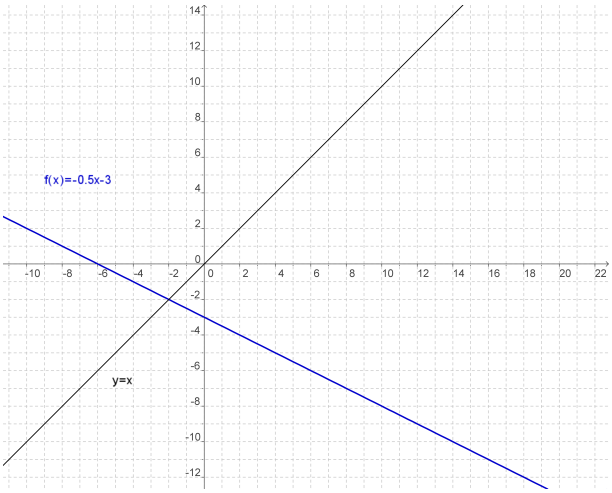
- *Affine Funktionen,*
- *Potenzfunktionen mit geradem positven/ negativen Exponenten*
- *Potenzfunktionen mit ungeradem positiven/ negativen Exponenten*
- *Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten*
- *Exponatialfunktionen,*
- *Logarithmusfunktionen.*

aus **Analysis-Aufgaben:** *Potenz- & Exponentialfunktionen 3*

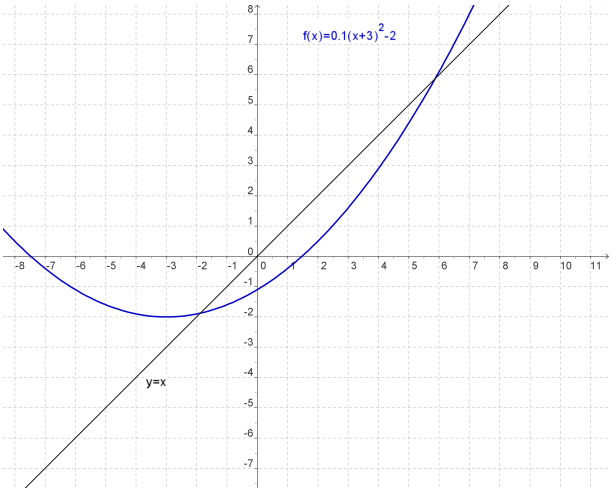
zugehörige Lösungen

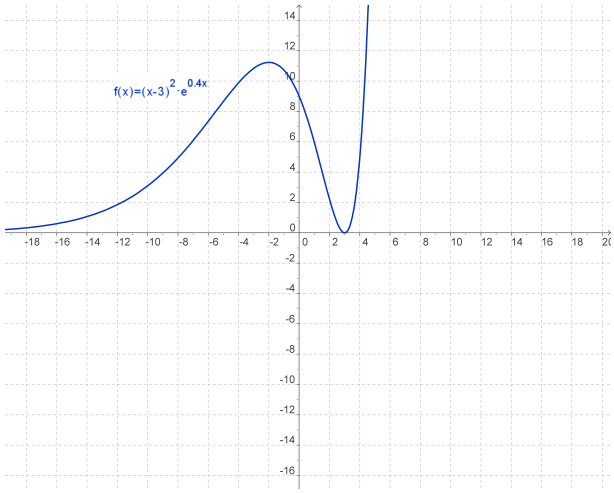
1. Bestimme graphisch die Bereiche, über welchen die folgenden Funktionen invertierbar sind und skizziere den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktionen:

(a)



(b)



(c) 

2. Skizziere die folgenden Funktionen und die zugehörigen Umkehrfunktionen:

   (a) $f(x) = x^3$

   (b) $g(x) = 2x - 3$

   (c) $h(x) = 3^x$

   (d) $i(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

3. Wir betrachten die folgende Funktion: $f(x) = x^2 - 2x$

   (a) Skizziere den Graphen von f.

   (b) Bestimme die Bereiche, über welchen f invertierbar ist.

   (c) Skizziere den Graphen von f^{-1}.

   (d) Bestimme die Funktionsgleichungen für f^{-1} mit den zugehörigen Definitions- und Wertebereichen.

4. Bestimme die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion zu folgenden Funktionen:

$a(x) = 3x - 4$	$b(x) = x$	$c(x) = ax + b$
$d(x) = 5^x$	$f(x) = e^x$	$g(x) = a^x, a \in \mathbb{R}_{>0}$
$h(x) = \log_6 x$	$i(x) = \ln x$	$j(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}_{>0}$

4.6 Wachstums- & Zerfallsprozesse (90')

Wir werden in diesem Abschnitt

das *exponentielle Wachstum* und
den *exponentiellen Zerfall*

besprechen.

Das sind Prozesse mit folgender charakteristischer Eigenschaft:

> *In gleich grossen (Zeit-)Intervallen ändert sich der Funktionswert um den gleichen Faktor.*

Der zugehörige Funktionstyp wird an klassischen Beispielen (Zinseszinsformel, Bakterienwachstum) hergeleitet. Diese Herleitungen sind sehr ausführlich dargestellt, so dass ein selbständiges Erarbeiten der theoretischen Grundlagen möglich ist. Mit Hilfe der anschliessenden Beispiele könnt ihr dann überprüfen, ob ihr die Theorie auch richtig verstanden habt.

Zum Abschluss werden wir weitere *Wachstumsmodelle* besprechen. Das exponentielle Wachstum stösst in der realen Anwendung schnell an seine Grenzen (Unbeschränktheit, Umwelteinflüsse, ...), was uns u.a. auf das sog. *begrenzte Wachstum* führen wird.

4.6.1 Zinseszinsformel (40')

Beispiel 4.3 Wir gehen von der folgenden (nicht mehr ganz realistischen) Situation aus:

Startkapital: $K_0 = \text{Fr. } 100.\text{-}$
Jahreszins: $p = 15\%$

und wollen die Entwicklung des Kapitals in den nächsten Jahren untersuchen:

- nach 1 Jahr:

$$\begin{array}{ccccccc} 100 & + & \frac{15}{100} \cdot 100 & = & 115 & & \\ K_0 & + & \frac{p}{100} \cdot K_0 & = & (1 + \frac{p}{100}) \cdot K_0 & =: & K_1 \end{array}$$

- nach 2 Jahren:

$$\begin{array}{ccccccccc} 115 & + & \frac{15}{100} \cdot 115 & = & 132.25 & & & & \\ K_1 & + & \frac{p}{100} \cdot K_1 & = & (1 + \frac{p}{100}) \cdot K_1 & = & (1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p}{100}) \cdot K_0 & =: & K_2 \end{array}$$

- nach 3 Jahren:

$$\begin{array}{ccccccccc} 132.25 & + & \frac{15}{100} \cdot 132.25 & = & 152.10 & & & & \\ K_2 & + & \frac{p}{100} \cdot K_2 & = & (1 + \frac{p}{100}) \cdot K_2 & = & (1 + \frac{p}{100})^3 \cdot K_0 & =: & K_3 \end{array}$$

- nach 4 Jahren: ... 174.90

- nach 10 Jahren: ... 404.55

$$K_9 \quad + \quad \frac{p}{100} \cdot K_9 \quad = \quad (1 + \frac{p}{100}) \cdot K_9 \quad = \quad (1 + \frac{p}{100})^{10} \cdot K_0 \quad =: \quad K_{10}$$

$$\vdots$$

- nach n Jahren: $K_n = \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n \cdot K_0$

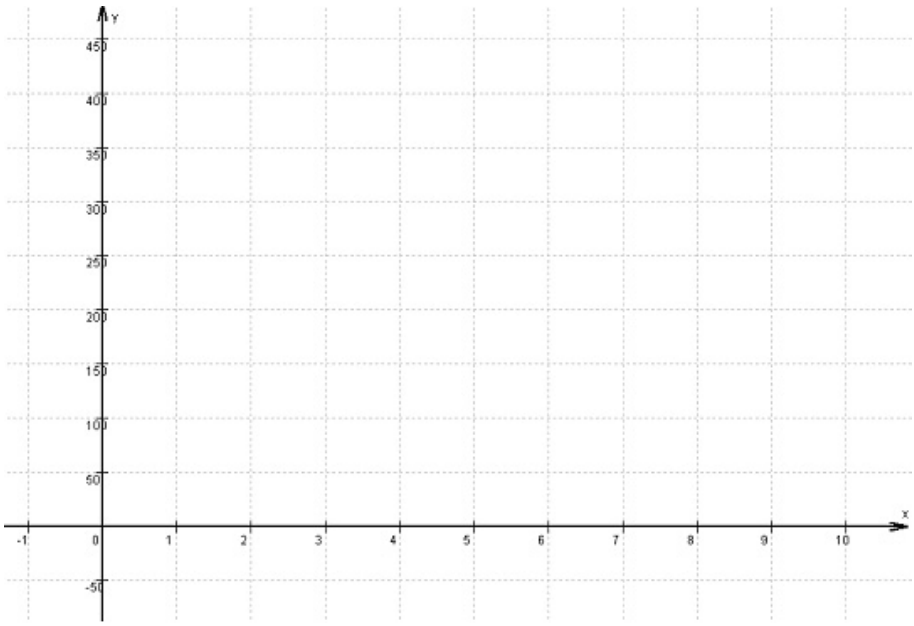
Was haben wir nun eigentlich bestimmt/ gefunden?

Wir haben eine Funktionsgleichung $K(t) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$, die

- das Wachstum des Kapitals beschreibt, d.h.:
  wir können zu jedem Zeitpunkt das Kapital bestimmen
  (und umgekehrt, da die exp-Funktion invertierbar ist!)

- und exponentiel ist, d.h.:
  in gleichen Zeitintervallen ändert sich das Kapital um den gleichen Faktor
  (pro Jahr: $\cdot\ (1 + \frac{p}{100})$*)*

- und folgende graphische Darstellung hat:



Weitere Anwendungen der *Zinseszinsformel:*

Wir gehen von einem Startkapital von $K_0 =$ Fr. 500'000.- und einem jährlichen Zinssatz von $p = 1.2\%$ aus.

Die zugehörige Funktion lautet somit: ...

1. Bestimme das Kapital nach 10 Jahren:
   Lösungsansatz: $K(10) = \ldots$

2. Nach wie vielen Jahren ist das Kapital auf 750'000.- Fr. angewachsen?
   Lösungsansatz: $K(t) = 750'000$

3. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
   Lösungsansatz: $K(t) = 2 \cdot 500'000$

4. Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz sein, damit wir nach 20 Jahren Millionäre sind?
   Lösungsansatz: $500'000 \cdot (1 + \frac{p}{100})^{20} = 1'000'000$

5. Wie gross müsste das Startkapital sein, damit wir mit dem ursprünglichen Jahreszins in 25 Jahren Millionäre sind?
   Lösungsansatz: $x \cdot 1.012^{25} = 1'000'000$

Aufgaben 4.21 *Löse die folgenden Aufgaben mathematisch zu Ende:*

Wir gehen von einem Startkapital von $K_0 =$ Fr. 250'000.- und einem jährlichen Zinssatz von $p = 1.75\%$ aus.

1. Bestimme das Kapital nach
   (a) 5 Jahren,
   (b) 20 Jahren.

2. Nach wie vielen Jahren ist das Kapital auf 300'000.- Fr. angewachsen?

3. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

4. Vor wie vielen Jahren war das Kapital 200'000.-?

5. Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz sein, damit wir nach 10 Jahren Millionäre sind?

6. Wie gross müsste das Startkapital sein, damit wir mit dem ursprünglichen Jahreszins in 20 Jahren Millionäre sind?

Poste deine Lösungen und/oder vergleiche mit den Lösungen deiner MitschülerInnen.

Aufgaben 4.22 *Löse das vorherige Beispiel in dem du dieses mal mit* Mathematica *oder* GeoGebra *arbeitest:*

Wir gehen von einem Startkapital von $K_0 =$ Fr. 250'000.- und einem jährlichen Zinssatz von $p = 1.75\%$ aus.

1. Bestimme das Kapital nach
   (a) 5 Jahren,
   (b) 20 Jahren.

2. Nach wie vielen Jahren ist das Kapital auf 300'000.- Fr. angewachsen?

3. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

4. Vor wie vielen Jahren war das Kapital 200'000.-?

5. Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz sein, damit wir nach 10 Jahren Millionäre sind?

6. Wie gross müsste das Startkapital sein, damit wir mit dem ursprünglichen Jahreszins in 20 Jahren Millionäre sind?

aus **Analysis-Aufgaben:** *Potenz- & Exponentialfunktionen 4*

zugehörige Lösungen

1. Ein Startkapital von Fr. 20'000.- wird zu einem Jahreszins von 2% angelegt.
   (a) Wie gross ist das Kapital nach 5 Jahren ?
   (b) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt ?
   (c) Bestimme den zugehörigen Wachstumskoeffizienten.

2. Wir betrachten die folgenden Startkapitalien mit den zugehörigen Wachstumsverhalten:
   - K_1 = Fr. 15'000.- wird zu einem Jahreszins von 3.75% angelegt.
   - K_2 = Fr. 25'000.- wächst mit einem Wachstumskoeffizienten von 1.0325.
   - K_3 = Fr. 20'000.- verdoppelt sich in 25 Jahren

   Alle Kapitalien seien zu den obigen Bedingungen am 1. Januar 2000 angelegt worden.

   (a) In welchem Jahr werden K_1 und K_2 den gleichen Wert haben?
   (b) In welchem Monat werden K_2 und K_3 den gleichen Wert haben?
   (c) Wann werden K_1, K_2 und K_3 den gleichen Wert haben?
   (d) Bestimme den Wachstumskoeffizienten für K_1, so dass K_1 und K_2 in 20 Jahren den gleichen Wert haben.
   (e) Wann (Monat & Jahr) werden $K_1 + K_2 + K_3$ zusammen einen Wert von Fr. 100'000.- erreicht haben?
   (Löse nur nummerisch: mit TR oder *GeoGebra*/Mathematica)
   (f) K_2 wird erst ab dem 1. Januar 2015 verzinst.
   In welchem Jahr werden K_2 und K_3 den gleichen Wert haben?

3. Das Startkapital a wird nach x Jahren ver-y-facht.
   (a) Leite die zugehörige Funktionsgleichung her.
   (b) Bestimme den zugehörigen Wachstumskoeffizienten.
   (c) Bestimme den zugehörigen Jahreszins.
   (d) Eine Startkapital von Fr. 100'000.- soll sich
      i. vom 1. Jan. 2000 - 31. Dez. 2009,
      ii. vom 1. Jan. 1950 - 31. Dez. 1959

   verdoppeln.
   Bestimme den dazu notwendigen Wachstumskoeffizienten und Jahreszins.

Aufgaben 4.23 *Losgelöst von den Begriffen* Startkapital *und* Zinssatz *lassen sich exponentielles Wachstum und Zerfall durch folgenden Funktionstyp darstellen:*

$$f(t) = a \cdot b^t$$

1. *Vergleiche die „neuen “ mit den „alten “ Parameter.*
2. *Beweise das exponentielle Verahlten des neuen Funktionstyps.*

4.6.2 *Ein Kurzreferat:* Exponentielles Wachstum (20')

Die folgenden abschliessenden Bemerkungen möchte ich noch vollständig aus den Referatsunterlagen in das Theorieskript übernehmen:

Abschliessende Bemerkungen:

- **exponentielles Wachstum als Populationsmodell**

  Bevölkerungsentwicklungen werden gerne durch Exponentialfunktionen und somit auf der *Modellannahme* eines exponentiellen Wachstums beschrieben. Dass dieses Modell aber nur eine zeitlich begrenzte (sinnvolle) Gültigkeit haben kann, ist auf Grund der uns bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktionen klar: $f(t) = a^t$ ist nicht beschränkt.
  Um die Modelle zu verbessern müssen weitere natürliche Einflüsse berücksichtig werden:

  - Platzmangel
  - Nahrungsknappheit
  - Räuber - Beute - Modell
  - ...

  Die Berücksichtung weiterer Eigenschaften führt zu immer komplexeren Modellen, welche dann in der Handhabung nicht mehr so einfach sind. Wir sehen schon hier ein grundlegendes Problem in der Modellentwicklung: Das Abwägen der Handhabung gegenüber der Zuverlässigkeit.
  (mehr dazu in der AM oder den Anwendungen der Differential- & Integralrechnung)

- **exponentielles Wachstum als Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  Bei unseren Anwendungen des exponentiellen Wachstums müssen wir uns im klaren sein, dass wir immer ein bischen gemogelt haben:
  Sowohl bei der ZinsesZinsrechnung als auch beim Beispiel mit den Bakterien haben wir $\mathbb{R}$ als Definitions- & Wertebereich verwendet, obwohl eigentlich nur $\mathbb{N}$ bei den Bakterien oder Monate/ Tage/ Stunden bei der ZinsesZinsrechnung zulässig sind.
  Wir werden den Übergang zur *stetigen* Verzinsung noch speziell betrachten und dabei auch eine Definition der Euler'schen Zahl kennenlernen.

Aufgaben 4.24 *2% der Oberfläche eines Teiches sind mit Algen bedeckt. Innerhalb von drei Tagen vervierfacht sich der Algenteppich.*

1. *Wie gross war der algenbedeckte Anteil des Teichs nach zwei Tagen?*

2. *Wie gross ist der algenbedeckte Anteil des Teichs nach 5.5 Tagen?*

3. *Wie gross war der algenbedeckte Anteil des Teichs vor 6 Stunden ?*

4. *In wie vielen Tagen ist der Teich zur Hälfte mit Algen bedeckt?*

5. *In wie vielen Tagen sind 50% des Teichs algenfrei?*

6. *In wie vielen Tagen ist der ganze Teich algenbedeckt?*

7. *Vor wie vielen Tagen war keine Alge auf dem Teich?*

8. *Bestimme den Wachstumsfaktor und das tägliche Wachstum in % so, dass der Teich bei gleichen Anfangsbedingungen nach fünf Tagen vollständig mit Algen bedeckt ist.*

Aufgaben 4.25 *Für Asien haben wir die folgenden Bevölkerungszahlen: (in Mio. EW)*

1800	**1900**	**1950**	**2000**
567	780	1400	3800

Wir gehen davon aus, dass das Wachstum exponentiell verläuft.

1. *Bestimme das Bevölkerungswachstum in % pro Jahr von ...*
   (a) *1800 bis 1900.*
   (b) *1900 bis 1950.*
   (c) *1950 bis 2000.*
   (d) *1800 bis 2000.*

2. *Bestimme den Wachstumsfaktor für die Periode 1900 bis 2000 und*
   (a) *... bestimme die Bevölkerungszahl im 2003.*
   (b) *... bestimme das Jahr, in welchem die Bevölkerung die 2 Millardengrenze überschritten hat.*
   (c) *Vergleiche deine Resultate mit den Modellen des exponentiellen Wachstums zwischen 1800 und 1900, 1900 und 1950 , ... sowohl numerisch als auch graphisch.*

aus **Analysis-Aufgaben:** *Potenz- & Exponentialfunktionen 4* und Serie 5

zugehörige Lösungen Serie 4 und Serie 5

1. Der 512-te Teil eines Sees ist von Algen bedeckt und der Algenteppich verdoppelt sich innert drei Tagen.
   Wann ist der ganze See mit Algen bedeckt ?

2. 2% der Oberfläche eines Teiches sind mit Algen bedeckt, deren Anzahl sich alle 3 Minuten um 4% vergrössert.
   (a) In wie vielen Stunden sind 50% des Teiches mit Algen bedeckt ?
   (b) In wie vielen Stunden ist der ganze Teich mit Algen bedeckt ?

3. Die Einwohnerzahl eines Dorfes verdreifacht sich innert 20 Jahren.
   Zu Begin der Erhebung lebten 5'000 Einwohner im Dorf.
   (a) Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung für das exponentielle Wachstum.
   (b) Bestimme die Anzahl Einwohner 50 Jahre nach der Erhebung.

4. Die Einwohnerzahl eines Dorfes drittelt sich innert 100 Jahren.
   10 Jahre nach der Erhebung lebten 1'000 Einwohner im Dorf.
   (a) Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung für das exponentielle Wachstum.
   (b) Bestimme die Anzahl Einwohner zum Zeitpunkt der Erhebung.

5. Bei 0^0C Aussentemperatur nimmt die Temperatur eines Heissgetränkes in der Thermoskanne stünndlich um 14% ab. Nach 4 Stunden werden in der Kanne 54^0C gemessen.
   Wie heiss war das Getränk beim Einfüllen?

6. Im Juli 2008 lebten im Hongkong nach Schätzungen 7 018 636 Menschen. Das Bevölkerungswachstum beträgt ca. $0,532\%$.
   Wie viele Einwohner wird die Millionenstadt bei konstantem Wachstum in 20 Jahren haben?

7. Wir gehen von einer Menge von 1g Pu^{239} aus.
   (a) Wann hatten wir 2g / 3g Pu^{239} ?
   (b) Wann werden wir nur noch 0,5g / 1mg Pu^{239} haben?

8. Bei einer Ausgrabung wird bei einem Fundstück ein C^{14}-Anteil von 20% bestimmt.
   Bestimme das Alter dieses Stücks.

Suche im Internet weitere Aufgaben zum Thema *Exponentielles Wachstum & Zerfall*:

Gefundene Links:

-
-

4.7 Repetition & Prüfungsvorbereitung

Im Folgenden sind Aufgaben formuliert, mit deren Lösungen ihr zentrale Punkte und Aussagen dieses *Gruppen - SOL - Projektes* aufgreifen müsst. So könnt ihr überprüfen, ob ihr den Stoff verstanden habt oder gegebenenfalls einzelne Teilbereiche nochmals wiederholen solltet.

- *Die Graphen der Exponential- & Potenzfunktionen (und der trigonometrischen Funktionen):*
  - Erstelle für jeden *Funktionstyp* ein *ggb*-File mit Schieberegler für die Parameter, um die Eigenschaften der Funktion in ihrer vollen Allgemeinheit graphisch sichtbar machen zu können.
  - Erstelle zwei Aufgabenblätter mit den Graphen verschiedener Funktionen, deren zugehörige Funktionsgleichungen zu bestimmen sind.

- *Die Inversion der Exponential- & Potenzfunktionen (und der trigonometrischen Funktionen):*
  - Erstelle für jeden *Funktionstyp* ein *ggb*-File mit Schieberegler für die Parameter (und eine geschickten Fallunterscheidung), um geometrisch die Graphen zu invertieren.
  - Bestimme mit Hilfe deines *ggb*-Files die zugehörigen Invertierbarkeitsbereiche.
  - Bestimme die Funktionsgleichungen der Inversen mit zugehörigem Definitions- und Wertebereich.

- Diskutiere vollständig die Invertierbarkeit von $f(x) = 0.25x^2 - 0.25x - 3$.
  - Rein algebraisch
  - Überprüfe deine Resultate geometrisch, mit Hilfe von *GeoGebra*.

- und natürlich viele Aufgaben zum exponentiellen Wachstum & Zerfall:

... und vergesst nicht die algebraischen Grundlagen ...
(eine zugehörige Repetition (falls notwendig) ist in der Tiefe und Ausführung euch überlassen.)

4.8 Weiterführende Populationsmodelle

Wir beginnen wieder mit einer kurzen Repetition:

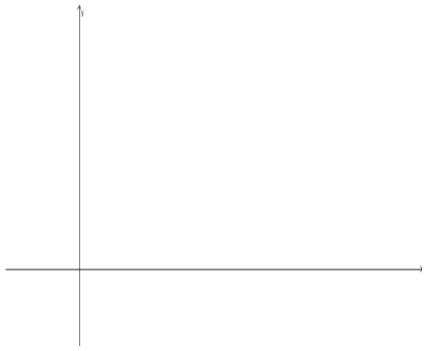
- Ein Wachstumsmodell heisst **linear**, genau dann wenn

Wir betrachten folgendes Beispiel:

Wir haben einen Teich mit einer Fläche von 1'000m^2, der zu einem Teil mit Algen bedeckt ist, welche sich linear vermehren:

1. Januar: 300m^2,
2. Januar: 350m^2,
3. Januar:
4. Januar:
10. Januar:

Vervollständige die obige Tabelle und stelle sie graphisch dar:



- Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung.
- Wann begann das Algenproblem ?
- Wann ist der Teich vollständig mit Algen bedeckt ?
- Bestimme die Grösse des Algenteppichs am 31. Januar.

Was für ein Problem taucht bei diesem Modell offensichtlich auf:

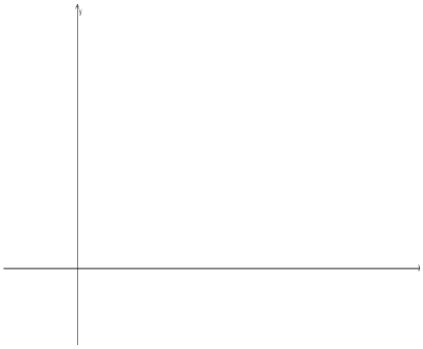
- Ein Wachstumsmodell heisst **exponentiell**, genau dann wenn

Wir betrachten folgendes Beispiel:

Wir haben einen Teich mit einer Fläche von 1'000m^2, der zu einem Teil mit Algen bedeckt ist, welche sich exponentiell vermehren:

1. Januar: 300m^2,
2. Januar: 350m^2,
3. Januar:
4. Januar:
10. Januar:

Vervollständige die obige Tabelle und stelle sie graphisch dar:



- Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung.
- Wann begann das Algenproblem ?
- Wann ist der Teich vollständig mit Algen bedeckt ?
- Bestimme die Grösse des Algenteppichs am 31. Januar.

Was für ein Problem taucht bei diesem Modell offensichtlich auf:

4.8.1 Beschränktes & logistisches Wachstum

Hierfür greifen wir auf ein online-Angebot aus Deutschland zurück,

https://www.schullv.de/

das leicht verständlich und mit anschaulichen Beispielen auf den folgenden Seiten die neuen Modelle erklärt.

Zugehörige Aufgaben sind dann zu finden unter

Aufgaben zum beschränkten Wachstum

und

Aufgaben zum logistischen Wachstum

Beschränktes Wachstum

Mathe > Digitales Schulbuch > Analysis > Wachstum > Beschränktes Wachstum

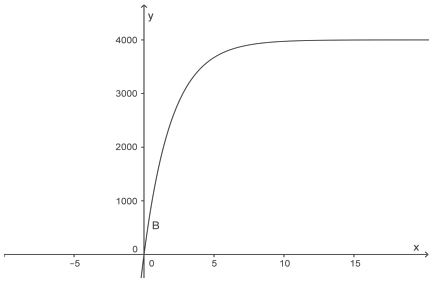
Spickzettel | Aufgaben | Lösungen PLUS | Lernvideos PLUS

Beim beschränkten Wachstum handelt es sich um ein mathematisches Modell, welches durch eine natürliche Schranke nach oben oder unten begrenzt wird, diese wird oft auch als Kapazität oder Sättigung bezeichnet. Dieses Modell wird beispielsweise für Wachstumsprozesse des Marktanteils, die Populationsausbreitung in einem begrenzten Raum oder auch Erwärmungs-/Abkühlprozesse verwendet.

Modell

Das nach oben beschränkte Wachstum mit $S > B$ hat die allgemeine Gleichung:

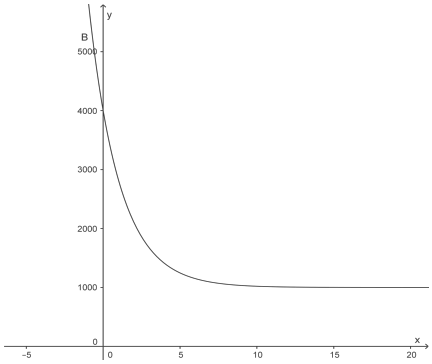
$$\boxed{B(t) = S - (S - B(0))\mathrm{e}^{-kt} = S - a\mathrm{e}^{-kt}}$$



Das nach unten beschränkte Wachstum mit $S < B$ hat die allgemeine Gleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} B(t) &= S + (B(0) - S)\mathrm{e}^{-kt} = \\ &S + a\mathrm{e}^{-kt} \end{aligned}}$$

© Copyright 2016 – www.SchulLV.de



Dabei gilt folgendes für die Parameter:

t: Zeit
$B(0)$: Anfangsbestand
$B(t)$: Bestandsgröße nach t Zeitschritten
S: natürliche Schranke
k: Wachstumskonstante

Beispiel

Ein Verlag bringt in einer Stadt eine neue Zeitschrift auf den Markt. Die Stadt hat 4000 Haushalte und nach einer Woche sind 1436 Zeitschriften verkauft.

Der Verkauf der Zeitschrift soll als begrenztes Wachstum modelliert werden.

Zu Beginn ($t = 0$) des Verkaufs hat noch niemand diese Zeitschrift, ist $B(0) = 0$. Die Schranke (Sättigung) entspricht der Anzahl der Haushalte: $S = 4000$. Für die Anzahl der verkauften Zeitschriften wird folgende Funktion aufgestellt.

$B(t) = S - (S - B(0))\mathrm{e}^{-kt}$
$= 4000 - 4000\mathrm{e}^{-kt}$

Dabei ist t die Zeit in Wochen nach Verkaufsbeginn. Die Wachstumskonstante k kannst du mit der Anzahl der nach $t = 1$ Woche verkauften Zeitschriften berechnen:

$$\begin{aligned}
1436 &= 4000 - 4000\mathrm{e}^{-k\cdot 1} && \mid +4000\mathrm{e}^{-kt};\ -1436 \\
4000\mathrm{e}^{-k} &= 2564 && \mid :4000 \\
\mathrm{e}^{-k} &= 0,641 && \ln \\
-k &\approx -0,445 && \mid :(-1) \\
k &\approx 0,445
\end{aligned}$$

Die Wachstumsfunktion lautet somit: $4000 - 4000\mathrm{e}^{-0,445t}$.

Der Verlag möchte gerne wissen, wann in 75% der Haushalte die Zeitschrift zu finden ist.

© Copyright 2016 – www.SchulLV.de

75% der Haushalte entspricht 3000 Haushalte. Es ist also der Zeitpunkt t gesucht, für den $B(t) = 3000$ gilt.

$$\begin{aligned}
B(t) &= 3000 \\
3000 &= 4000 - 4000\mathrm{e}^{-0,445t} && \mid +4000\mathrm{e}^{-0,445t};\ -3000 \\
4000\mathrm{e}^{-0,445t} &= 1000 && \mid :4000 \\
\mathrm{e}^{-0,445t} &= 0,25 && \ln \\
-0,455t &\approx -1,386 && \mid :(-0,455) \\
t &\approx 3,05
\end{aligned}$$

Nach ungefähr drei Wochen haben 75% der Haushalte die Zeitschrift gekauft.

© Copyright 2016 – www.SchulLV.de

Logistisches Wachstum

Beim logistischen Wachstum handelt es sich um ein mathematisches Modell, welches oft für Wachstumsprozesse bei Bakterien angewendet wird. Hier wird das Modell des exponentiellen Wachstums so angepasst, dass es den Verbrauch einer Ressource mit einschließt. Bei einer Bakterienkultur könnte das beispielsweise der Nährboden, der nur eine begrenzte Größe hat, sein. Zu Beginn verläuft der Wachstumsprozess somit exponentiell und, wenn man sich der Sättigungsgrenze nähert, wird er durch ein beschränktes Wachstumsmodell beschrieben.

Modell

Eine logistische Wachstumsfunktion hat allgemein folgende Gleichung:

$$B(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S - a)\, e^{-Skt}}$$

Dabei gilt folgendes für die Parameter:

- t: Zeit
- $B(t)$: Bestandsgröße nach t Zeitschritten
- S: natürliche Schranke
- k: Wachstumskonstante
- a: Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$
- S: Schranke für die Bestandsgröße, die nicht überschritten werden kann

Beispiel

Auf einem Nährboden vermehrt sich eine Bakterienkultur. Zu Beginn befindet sich eine Bakterienkultur aus 15 Bakterien auf dem Nährboden, nach 10 Tagen sind es bereits 114 Bakterien. Der Nährboden bietet Platz für ca. 200 Bakterien.

Bestimme zunächst die Schranke:

Da die Anzahl von 200 nie überschritten werden kann gilt $S = 200$.

Da zu Beginn der Beobachtung 15 Bakterien vorhanden sind, ist der Anfangsbestand $a = 15$.

Als nächstes kannst du mit Hilfe der zweiten Angabe $B(10) = 114$ die Wachstumskonstante k berechnen:

© Copyright 2017 – www.SchulLV.de

$$
\begin{aligned}
B(10) &= 114 \\
114 &= \frac{15 \cdot 200}{15 + (200 - 15)e^{-200k \cdot 10}} \\
114 &= \frac{3000}{15 + 185e^{-2000k}} && \mid \cdot (15 + 185e^{-2000k}) \\
1710 + 21090e^{-2000k} &= 3000 && \mid -1710 \\
21090e^{-2000k} &= 1290 && \mid : 21090 \\
e^{-2000k} &= 0,061 && \ln \\
-2000k &\approx -2,797 && \mid : (-2000) \\
k &\approx 0,0014
\end{aligned}
$$

Das logistische Wachstumsmodell lautet dann:

$$B(t) = \frac{3000}{15 + 185e^{-0,28t}}$$

© Copyright 2017 – www.SchulLV.de

4.8.2 Vergiftetes Wachstum

Eine typische Situation für *vergiftetes Wachstum* ist der Verlauf einer Epidemie. Während sich die Anzahl der Erkranten zu Beginn exponentiell ausweitet, kommt es nach einiger Zeit zu einem Sinken der Anzahl Neuerkrankungen und schliesslich zu einem Abflauen der Epidemie.

Ebenfalls typisch ist der Verlauf der Vermehrung einer Population von Bakterien, welche durch ein Antibiotikum gebremst wird.

Wir wollen für dies *Modell* den folgenden Funktionsty verwenden:

$$f(t) = k \cdot b^t \cdot c^{t^2}$$

mit
- k als Anfangsbestand,
- t für die Zeit,
- b als der Wachstumsfaktor/-koeffizient, pro Zeiteinheit und mit $1 < b$,
- c als der Zerfallsfaktor/-koeffizient, pro (Quadrat)Zeiteinheit und mit $0 < c < 1$
- $f(t)$ als der Bestand zur Zeit t.

Aufgaben 4.26
- *Untersuche den Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen.*
- *Ersetze in der Funktionsgleichung die Wachstums- & Zerfallsfaktoren durch Prozentangaben.*
- *Kann im Falle einer Epidemie auf der Gundlage dieses* Modells *die Anzahl Neuerkrankten ganz verschwinden?*
- *Formuliere eine eigene Aufgabe.*

Aufgaben 4.27 *Bei einer Operation wird für die Narkose ein Medikament verwendet, das mit einer Halbwertszeit von 40 Minuten abgebaut wird.*

1. *Welche Funktion erfasst den Zusammenhang von verstrichener Zeit und noch vorhandener Medikamentenmenge?*
   (Verwende für die Anfangsmenge K_0)

2. *Wieviel Prozent des Medikamentes zerfällt pro Minute?*

3. *Wieviel Prozent der urspünglichen Menge sind nach 10 Minuten noch übrig?*

4. *Eine Patientin erhält zuerst 2mg des Medikaments, danach in zwei Abständen von einer Stunde je 1mg.*
   Welche Menge ist nach der letzten Infusion insgesamt vorhanden?

5. *Die Patientin wacht auf, wenn weniger als 0.5mg des Medikaments im Körper übrig sind.*
   Wie lange nach der letzten Infusion wird sie aufwachen?

6. *Diese Patientin sollte spätestens 30 Minuten nach der letzten Infusion aufwachen.*
   Wieviel mg des Medikaments sollte sie mit der letzten Infusion maximal bekommen?

Aufgaben 4.28 *Auf einer Insel lebten vor 10 Jahren 200 Kaninchen. Inzwischen haben sie sich auf 1200 vermehrt und grossen Schaden angerichtet.*

1. *Wir nehmen an, dass sich die Kaninchen exponentiell gemäss* $f(t) = k \cdot 2^{at}$ *vermehren.*
   Berechne die Kontante a.

2. *Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum?*

3. *In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Anzahl der Kaninchen?*

4. *Es wird beschlossen, sofort 400 Kaninchen abzuschiessen und dann in einem Jahr und in zwei Jahren nochmals jeweils 200.*
   Wieviele Tiere werden nach dem letzten Abschuss noch übrig sein?

5. *Wieviele Kaninchen hätten vor 10 Jahren abgeschossen werden sollen, um den gleichen Endstand zu erreichen?*

4.8.3 Aufgaben zur Algorithmik

Wir wollen noch unsere ersten Kenntnisse im Programmieren mit *Mathmatica* anwenden:

1. *zum Exponentiellen Wachstum*
   Auf den folgenden Seiten werden drei Möglichkeiten der Darstellung des exponentiellen Wachstums vorgestellt.
   Erstelle ein Programm mit *Mathematica*, welches durch die Eingabe der Parameter die richtige Darstellung erkennt, die zugehörige Funktion graphisch darstellt und den Wert zum gewünschten Zeitpunkt berechnet.

2. *zum beschränkten Wachstum*
   Erstelle ein Programm mit *Mathematica*, welches durch die Eingabe der Parameter erkennt, ob es sich um ein nach oben oder unter beschränktes Wachstum handelt,die zugehörige Funktion graphisch darstellt und den Wert zum gewünschten Zeitpunkt berechnet.

3. *logistisches Wachstum*
   Erstelle ein sinnvolles Programm mit *Mathematica* zur Behandlung von logistischen Wachstumsprozessen.

4. *Wachstumsprozesse*
   Erstelle ein Programm mit *Mathematica*, welches die obigen drei Programme in einem Programm vereint

Exponentielles Wachstum

Mathe > Digitales Schulbuch > Analysis > Wachstum > Exponentielles Wachstum

Spickzettel | Aufgaben | Lösungen PLUS | Lernvideos PLUS

Beim exponentiellen Wachstum handelt es sich um ein mathematisches Modell, welches oft für Wachstumsprozesse bei Bakterien angewendet wird. Ebenso oft kommt der exponentielle Zerfall vor, bei dem es sich um das gleiche Modell handelt, allerdings nimmt die betrachtete Größe ab. Dies kommt oft in Verbindung mit dem Zerfall radioaktiver Stoffe vor.

Modell

Eine exponentielle Wachstumsfunktion hat allgemein folgende Gleichung:

$$\boxed{B(t) = B(0) \cdot b^t}$$

Dabei gilt folgendes für die Parameter:

t: Zeit
B(0): Anfangsbestand
B(t): Bestandsgröße nach t Zeitschritten
b: Wachstumsfaktor

Weitere Darstellungsweisen

Mit Hilfe der Wachstumsrate:

$$\boxed{B(t) = B(0) \cdot (1+p)^t}$$

Dabei beschreibt $|p| \in (0,1)$ die prozentuale Zunahme bzw. Abnahme der Bestandsgröße pro Zeitschritt und wird als Wachstumsrate bezeichnet. Handelt es sich um exponentiellen Zerfall, so ist p negativ, ansonsten positiv. Es gilt der Zusammenhang $b = 1 + p$

Mit Hilfe der e-Funktion:

$$\boxed{B(t) = B(0) \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot t}}$$

Dabei wird λ als Wachstumskonstante bezeichnet und steht in folgendem Zusammenhang: $\lambda = \ln(b) = \ln(1+p)$

Beispiel 1

Der Zerfall von 8g Iod_{131} wird durch die folgende Gleichung beschrieben, wobei t in Tagen und $B(t)$ in Gramm gemessen wird:

$B(t) = 8 \cdot 0,9170^t$ Wir können nun die Halbwertszeit von Iod_{131} berechnen, also die Zeit nach der sich die radioaktive Masse halbiert hat. Dazu setzen wir den Funktionsterm mit $0,5 \cdot 8 = 4$ gleich und lösen nach t auf:

© Copyright 2016 – www.SchulLV.de

$$\begin{aligned}
4 &= 8 \cdot 0,9170^t && | : 8 \\
0,5 &= 0,9170^t && \ln \\
\ln(0,5) &= \ln(0,9170^t) \\
\ln(0,5) &= t \cdot \ln(0,9170) && | : \ln(0,9170) \\
\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9170)} &= t \\
t &\approx 8
\end{aligned}$$

Das radioaktive Isotop 131 von Iod hat also eine Halbwertszeit von ca. 8 Tagen.

Beispiel 2

Von einer Bakterienkultur sind zu Beginn der Messung 100 Bakterien vorhanden. Jede Minute verdoppelt sich jedes Bakterium durch Zellteilung. Mit t in Minuten und $B(t)$ in der Anzahl der Bakterien, wird das Wachstum der Bakterienkultur mit folgender Gleichung beschrieben:

$p = 1$ $\qquad$ $B(0) = 100$

$\Rightarrow b = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \lambda = \ln(2) \approx 0,6931$

$\Rightarrow B(t) = 100 \cdot 2^t = 100 \cdot e^{0,6931 \cdot t}$

Tipp

Im Beispiel hast du bereits einige Rechenregeln für den Logarithmus verwendet. Es ist also hilfreich, dir noch einmal alle Rechenregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen ins Gedächtnis zu rufen, um mit Wachstumsfunktionen umgehen zu können.

© Copyright 2016 – www.SchulLV.de

4.9 Von der jährlichen zur stetige Verzinsung und zur Zahl e

Links ...

Herleitung der allgemeinen Zinseszinsformel

Zinsrechnung, aus https://mathe.zone/

4.10 *Meine* Zusammenfassung