Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} q^n$
mit $\mid q \mid < 1$
eine Klassenarbeit

für die gymnasiale Oberstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

1. Januar 2023

Der Grenzwert $\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{q^n}$ mit $\mid \mathbf{q} \mid < \mathbf{1}$

eine Klassenarbeit

Diese *Klassenarbeit* ist ein Auszug aus meinem Skript zu den *Folgen & Reihen*:

Das Skript ist zufinden unter

https://ronaldbalestra.ch/dokumente/analysis/folgen-reihen/Theorie-MNProfil.pdf

Das **Ziel** dieser **Klassenarbeit** ist, dass die Klasse den Beweis zur *zentralen Aussage* dieses Kapitels,

$$\text{dem Grenzwert } \lim_{n\to\infty} q^n \quad \text{mit} \quad \mid q \mid < 1,$$

nachvollziehen könnt.

Dazu werden, in Gruppen aufgeteilt, die notwendigen mathematischen Grundlagen zusammengetragen, ausgearbeitet und der Klasse verständlich präsentiert. Im Stile eines Unterrichtspuzzles wird in neu zusammengesetzten Gruppen der Beweis durchgearbeitet und zwei weitere Aufgaben zum *Vergleichskriterium* gelöst.

Die gesuchte *zentrale Aussage* könnt ihr selber formulieren, mit Hilfe der folgenden ersten Aufgabe:

Aufgaben 1. *Bestimme heuristisch* $\lim_{n\to\infty} q^n$ *mit* $\mid q \mid \leq 1$ *und fasst eure Erkenntnis in einer Behauptung zusammen.*

$$\text{Beh.:} \quad \text{Sei } q \in \mathbb{R}, \text{ mit } \mid q \mid < 1 \;\Rightarrow\; \ldots\ldots\ldots$$

Als Vorbereitung für einen Beweis eurer Behauptung sollt ihr euch in die folgenden Themen einarbeiten:

Thema 1 das *Vergleichskriterium*/ der *Vergleichssatz*,

Thema 2 die *Bernoullische Ungleichung*

und für SchhülerInnen mit IT-Interessen besteht noch

Thema 3 Folgen & *Mathematica*/ *GeoGebra*/ TR

- **Eure Aufgaben:**

  1. Wählt euer Thema aus,
  2. Teilt euch in Guppen (3 - max 4 SchülerInnen) auf,
  3. Bearbeitet eure Auswahl ...
     - recheriert euer Thema,
     - sucht einen Beweis und arbeitet ihn durch,
     - sucht zugehörige und für euch nachvollziehbare Beispiele zur Veranschaulichung oder konstruiert gerne eigene Beispiele,
     - fasst eure Arbeiten in einem präsentationstauglichen PDF zusammen.

     - Zum Thema 3:
       Recheriert die Möglichkeiten, welche *Mathemtica*, *GeoGebra* oder TR bieten, ergänzt sie mit anschaulichen Beispielen und wendet sie auf die Aufgaben an.
       Macht eure Arbeit präsentationstauglich.

  4. Präsentiert eure Arbeit vor der Klasse,
     für den Austausch eurer Unterlagen stehen die üblichen digitalen Kanäle zur Verfügung.
  5. Arbeitet den Beweis *zur zentralen Aussage* durch und löst die zwei Aufgaben.

- zur **Gruppeneinteilung:**
  - Teilt eurh in *funktionierende* Lerngruppen auf, d.h.
    mit einer Gruppengrösse- und zusammensetzung, die ein effizientes Arbeiten ermöglicht, also in Mitglieder
    * mit einem ausgeglichenem Arbeitstempo,
    * mit ähnlichen Arbeitsgewohnheiten- und zeiten,
    * und einer vergleichbaren Arbeitshaltung,
      also ohne TrittbrettfahrerInnen.

Gruppe	**Thema**	**Mitglieder**
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		

Beachte, dass die Klassenaufteilung in die Themen 1, 2 & 3 ungefähr 2 : 2 : 1 sein soll.

für eure Notizen ...

Satz. *Sei* $q \in \mathbb{R}$, *mit* $\mid q \mid < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \; q^n = 0$.

Proof. Es reicht zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \; \mid q \mid^n = 0 \;\Rightarrow$ ŒdA $q > 0$.

Wir setzten

$$t := \frac{1}{q} - 1 > 0$$

Nach der *Bernoullischen Ungleichung* gilt für alle n:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (t+1)^n \geq 1 + nt$$

und daraus folgt

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{1+nt}$$

und mit

$$\frac{1}{1+nt} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+t}$$

folgt weiter

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nt} = 0$$

Mit Hilfe des Vergleichssatzes folgt die Behauptung. □

Aufgaben 2. *Beweise mit Hilfe des Vergleichskriterium:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$
   Tipp; Beweise zuerst : $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq \dfrac{4}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n} = 0$