Die Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades

Die Trilogie einer *Lernaufgabe*

Teil 1
Die Herleitug & Anwendung der Binomischen Formeln

mit *Lösungen*

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

13. November 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Ziele und Vorgehensweisen

1.1 Das Ziel dieser Trilogie

ist das Entwickeln von Möglichkeiten zur Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades und deren Anwendungen,

in drei Teilen:

In Teil 0 werden die notwendigen Begriffe und Definitionen zur anschliessenden, selbständigen Behandlung des ersten und zweites Teils zusammengestellt,

In Teil 1 werden die *binomischen Formeln* hergeleitet und angewendet,

In Teil 2 wird der *Klammeransatz* hergeleitet und angewendet,

In Teil 3 wird das Erlernte im *Bruchrechnen* zur Anwendung gebracht.

1.2 Teil 1

Wir sind im **Teil 1** der Trilogie und hier geht es um das Entwickeln einer Möglichkeit zur späteren Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades:

Die binomischen Formeln

Diese Formeln werden dir sehr hilfreich sein, unter anderem im Bereich des Bruchrechnens, des Vereinfachens von Schlussresultaten, usw.

Du wirst den Aufgabenstellungen folgend selbständig den Ansatz für diese Möglichkeiten/Formeln herleiten können. Das heisst, dass du durch das Lösen der Aufgaben die Regelmässigkeiten, die zu den *binomischen Formeln* führen erkennen und als Gesetzmässigkeiten fomulieren, beweisen und in der Faktorzerlegung zur Anwendung bringen wirst.

Vergiss nicht das das Wichtigste:
Im letzten Kapitel deine Erkenntnisse zusammenzutragen ...

2 Das Erkennen der Regelmässigkeiten

Multipliziere aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest und *so lange alle* Schritte ausführst, bis du die Regel erkennst und das Resultat direkt hinschreiben kannst:

1. $(a+b)^2 = \;\ldots\ldots\; = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(x-y)^2 = \;\ldots\ldots\; = x^2 - 2xy + y^2$

3. $(r+s)(r-s) = \;\ldots\ldots\; = r^2 - s^2$

4. $(v+w)^2 = \;\ldots\ldots\; = v^2 + 2vw + w^2$

5. $(t+a)^2 = \;\ldots\ldots\; = t^2 + 2at + a^2$

6. $(2q+t)^2 = \;\ldots\ldots\; = 4q^2 + 4qt + t^2$

7. $(r+4t)^2 = \;\ldots\ldots\; = r^2 + 8rt + 16t^2$

8. $(2a+3c)^2 = \;\ldots\ldots\; = 4a^2 + 12ac + 9c^2$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen das Resultat direkt hin:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(g+h)^2 = g^2 + 2gh + h^2$
3. $(2w+q)^2 = 4w^2 + 4qw + q^2$
4. $(d+4t)^2 = d^2 + 8dt + 16t^2$
5. $(3f+5j)^2 = 9f^2 + 30fj + 25j^2$
6. $(x^2+3y^4)^2 = x^4 + 6x^2y^4 + 9y^8$

Multipliziere wieder aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest und *so lange alle* Schritte ausführst, bis du die Regel erkennst und das Resultat direkt hinschreiben kannst:

1. $(a+b)^2 = \ \ldots\ldots \ = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(x-y)^2 = \ \ldots\ldots \ = x^2 - 2xy + y^2$

3. $(r+s)(r-s) = \ \ldots\ldots \ = r^2 - s^2$

4. $(v-w)^2 = \ \ldots\ldots \ = v^2 - 2vw + w^2$

5. $(t-a)^2 = \ \ldots\ldots \ = t^2 - 2at + a^2$

6. $(2q-t)^2 = \ \ldots\ldots \ = 4q^2 - 4qt + t^2$

7. $(r-4t)^2 = \ \ldots\ldots \ = r^2 - 8rt + 16t^2$

8. $(2a-3c)^2 = \ \ldots\ldots \ = 4a^2 - 12ac + 9c^2$

Schreibe wieder aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen das Resultat direkt hin:

(a) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(b) $(g-h)^2 = g^2 - 2gh + h^2$

(c) $(2w-q)^2 = 4w^2 - 4qw + q^2$

(d) $(d-4t)^2 = d^2 - 8dt + 16t^2$

(e) $(3f-5j)^2 = 9f^2 - 30fj + 25j^2$

(f) $(x^2-3y^4)^2 = x^4 - 6x^2y^4 + 9y^8$

… und ein letztes Mal:
Ausmultiplizieren unter Mehrfachanwendung des Distributivgesetzes:

1. $(a+b)^2 = \;\ldots\ldots\; = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(x-y)^2 = \;\ldots\ldots\; = x^2 - 2xy + y^2$

3. $(r+s)(r-s) = \;\ldots\ldots\; = r^2 - s^2$

4. $(v+w)(v-w) = \;\ldots\ldots\; = v^2 - w^2$

5. $(t-a)(t+a) = \;\ldots\ldots\; = t^2 - a^2$

6. $(2q+t)(t-2q) = \;\ldots\ldots\; = t^2 - 4q^2$

7. $(4t-r)(r+4t) = \;\ldots\ldots\; = 16t^2 - r^2$

8. $(2a+3c)(2a-3c) = \;\ldots\ldots\; = 4a^2 - 9c^2$

Ohne ausführliches Herleitung solltest du nun in der Lage sein, alle folgenden Resultat direkt hinzuschreiben:

(a) $(r+s)(r-s) = r^2 - s^2$

(b) $(g+h)(g-h) = g^2 - h^2$

(c) $(2w-q)(2w+q) = 4w^2 - q^2$

(d) $(d+4t)(4t-d) = 16t^2 - d^2$

(e) $(3f-5j)(3f+5j) = 9f^2 - 25j^2$

(f) $(x^2+3y^4)(x^2-3y^4) = x^4 - 9y^8$

3 Das Formulieren der Gesetzmässigkeiten

Jetzt geht es darum, deine Erfahrungen zu formulieren, einerseits *ausgedeutsch* und andereseits *mathematisch* dargestellt:

3.1 Die 1. Binomische Formel

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\mathbf{2}$ ist gleich dem Quadrat des ersten Summanden

plus

dem doppelten Produkt aus beiden Summanden

plus

dem Quadrat des zweiten Summanden.

$= \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

3.2 Die 2. Binomische Formel

$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathbf{2}$ ist gleich

$=$

3.3 Die 3. Binomische Formel

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ ist gleich

$=$

4 Die Beweise

Formuliere und beweise die drei binomischen Formeln:

- **1. Binomische Formel:**

  Behauptung: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

  Beweis:
  $$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + ab \cdot (1+1) + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

  $\square$

- **2. Binomische Formel:**

  Behauptung: ...

  Beweis:

- **3. Binomische Formel:**

  Behauptung: ...

  Beweis:

5 Die Anwendung in der Faktorzerlegung

Bei der *Faktorzerlegung* geht es darum, den Term (in unseren Fällen ein Polynom 2. Grades) als ein Produkt darzustellen, ohne den Wert zu ändern.

Wir kennen schon die Anwendungsmöglichkeit des Distributivgesetzes, die es uns ermöglicht, gemeinsame Faktoren aus einem Term herauszuziehen:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) = a(b + c)$$

$$5a^3b^2c + 15a^2bc^3 - 30ab^3c^2 = 5abc \cdot (a^2b + 3ac^2 - 6b^2c)$$

Beispiel 5.1 Stelle zur Repetition die folgenden Terme mit Hilfe des Distributivgesetzes als ein Produkt dar:

1. $abc + ab + bc = b(ac + a + c)$

2. $2r^6 + 4r^4 + 6r^2 = 2r^2(r^4 + 2r^2 + 3)$

3. $(a + b) - (b + a)^2 + (a + b)^4 = (a + b)(1 - (a + b) + (a + b)^3)$

Im Folgenden wollen wir die binomischen Formeln zur Anwendung bringen und verwenden auch hierbei, dass Gleichungen von *Links nach Rechts* und von *Rechts nach Links* gelesen werden können und auch so gelten:

5.1 1. Binomische Formel

$$\begin{array}{rrcll} & (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 & \textit{von Links nach Rechts} \\ \Leftrightarrow & a^2+2ab+b^2 & = & (a+b)^2 & \textit{von Rechts nach Links} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{a^2+2ab+b^2} & = & \mathbf{(a+b)(a+b)} & \textit{für die Faktorzerlegung} \end{array}$$

Ausgedeutscht bedeutet das

Das Quadrat des ersten Summanden plus
das doppelte Produkt aus beiden Summanden plus
das Quadrat des zweiten Summanden.

lässt sich darstellen als das Quadrat der Summe der Basen der quadratischen Terme.

$$\mathbf{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)}$$

Beispiel 5.2 Stelle als Produkt dar, zerlege vollständig in Faktoren:

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)$
2. $t^2+2ta+a^2=(t+a)(t+a)$
3. $r^2+8tr+16t^2=(r+4t)(r+4t)$
4. $4a^2+12ac+9c^2=(2a+3c)(2a+3c)$
5. $x^2+10x+25=(x+5)(x+5)$
6. $g^2+18g+81=(g+9)(g+9)$
7. $2k^2+44k+242=2(k+11)(k+11)$
8. $4q^2+8qs+4s^2=4(q+s)(q+s)$
9. $s^2+10s+16=$ *(im Moment noch) nicht zerlegbar*

5.2 2. Binomische Formel

$$\begin{array}{rrcl} & (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ \Leftrightarrow & a^2-2ab+b^2 & = & (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{a^2-2ab+b^2} & = & \mathbf{(a-b)(a-b)} \end{array}$$

Ausgedeutscht bedeutet das ...

Beispiel 5.3 Zerlege vollständig in Faktoren;

1. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b)$
2. $t^2 - 2ta + a^2 = (t-a)(t-a)$
3. $r^2 - 8rt + 16t^2 = (r-4t)(r-4t)$
4. $4a^2 - 12ac + 9c^2 = (2a-3c)(2a-3c)$
5. $x^2 - 10x + 25 = (x-5)(x-5)$
6. $g^2 - 14g + 49 = (g-7)(g-7)$
7. $2k^2 - 48k + 288 = 2(k-12)(k-12)$
8. $9q^2 - 18qs + 9s^2 = 9(q-s)(q-s)$
9. $s^2 - 15s + 36 =$ *(im Moment noch) nicht zerlegbar*

5.3 Einige kleine Zwischenbemerkungen

Wenn du richtig gearbeitet hast, wirst du bemerkt haben, dass

- ... es sich lohnen kann, die Einfache Anwendung des Distributivgesetzes nicht zu vergessen und vor der Anwendung der Binomischen Formeln gemeinsame Faktoren herauszuziehen: Bsp. 7. & 8.

$$\begin{aligned} 2k^2 + 44k + 242 &= 2 \cdot (k^2 + 22k + 121) &= 2(k+11)^2 \\ 9q^2 - 18qs + 9s^2 &= 9 \cdot (q^2 - 2qs + s^2) &= 9(q-s)^2 \end{aligned}$$

- ... die Anwendungen der Binomischen Formeln nicht immer geht: Beispiel 9, in den Anwendungen zur 1. & 2. binomischen Formel.

  Trotzdem lassen sich beide Terme in Faktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} s^2 + 10s + 16 &= (s+2)(s+8) \\ s^2 - 15s + 36 &= (s-3)(s-12) \end{aligned}$$

  Wie das gemacht wird, wirst du später im Unterricht unter dem Thema *Klammeransatz* noch kennenlernen.

  Was du jetzt aber schon sicher machen kannst, ist die obigen Faktorzerlegungen zu *verifizieren* ...

5.4 3. Binomische Formel

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \Leftrightarrow \quad \ldots\ \ldots\ \ldots &= \ldots\ldots\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Ausgedeutscht bedeutet das ...

Beispiel 5.4 Zerlege vollständig in Faktoren;

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
2. $t^2 - a^2 = (t+a)(t-a)$
3. $r^2 - 16t^2 = (r+4t)(r-4t)$
4. $4a^2 - 9c^2 = (2a+3c)(2a-3c)$
5. $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$
6. $g^2 - 841 = (g+29)(g-29)$
7. $k^2 - 729 = (k+27)(k-27)$
8. $4s^2 - 225q^4 = (2s+15q^2)(2s-15q^2)$
9. $r^4 - 81 = (r+3)(r-3)(r^2+9)$

6 Gemischte Beispiele

Unter den folgenden Polynome sind auch Beispiele, welche *nicht* zerlegbar sind. In diesen Fällen ist konkret anzugeben, warum die Binomischen Formeln nicht zur Anwendung kommen können.

Beispiel 6.1 Zerlege vollständig in Faktoren:

1. $r^2 + 12r + 36 = (r + 6)(r + 6)$
2. $h^2 - 47 = (im\ Moment\ noch)\ nicht\ zerlegbar$
3. $u^2 - 16u + 64 = (u - 8)(u + 8)$
4. $f^4 - 16 = (f + 2)(f - 2)(f^2 + 4)$
5. $t^2 + g^2 = nicht\ zerlegbar$
6. $g^2 + 26g + 169 = (g + 13)(g - 13)$
7. $h^2 - 4bh + 4b^2 = (h - 2b)(h - 2b)$
8. $4r^2 + 12rv + 9v^2 = (2r + 3v)(2r + 3v)$
9. $r^3 - 25r = r(r + 5)(r - 5)$
10. $64e^3 + 48e^2 + 9e = e(8e + 3)(8e + 3)$
11. $x^2 - 8x + 25 = (nicht\ zerlegbar$
12. $a^4 - 1 = (a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$
13. $s^2 + 1 = nicht\ zerlegbar$
14. $2x^4 - 16x^2 + 32 = 2(x + 2)(x - 2)(x + 2)(x - 2)$

7 Meine Erkenntnisse