Die Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades

Die Trilogie einer *Lernaufgabe*

Teil 2

Die Herleitung & Anwendung des Klammeransatzes

mit *Lösungen*

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

13. November 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Ziele und Vorgehensweisen **2**
1.1 Das Ziel dieser Trilogie 2
1.2 Teil 2 2

2 Das Erkennen der Regelmässigkeiten **3**
2.1 für das konstante Glied im Polynom 2. Grades 3
2.2 Die Regel für das konstante Glied 6
2.3 für den linearen Koeffizienten im Polynom 2. Grades 7
2.4 Die Regel für den linearen Koeffizienten 10

3 Die letzten Aufgaben zum Ausmultiplizieren: **11**

4 Faktorzerlegung **12**
4.1 Aufbauende Beispiele
zur Automatisierung der Faktorzerlegung 13
4.1.1 Noch einige mathematische Überlegungen 17

5 Die schönen Beispiele: **20**

6 Links zu weiteren Aufgaben **22**

7 Die Faktorzerlegung in *meinen* Worten **23**

1 Ziele und Vorgehensweisen

1.1 Das Ziel dieser Trilogie

ist das Entwickeln von Möglichkeiten zur Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades und deren Anwendungen,

in drei Teilen:

In Teil 0 werden die notwendigen Begriffe und Definitionen zur anschliessenden, selbständigen Behandlung des ersten und zweites Teils zusammengestellt,

In Teil 1 werden die *binomischen Formeln* hergeleitet und angewendet,

In Teil 2 wird der *Klammeransatz* hergeleitet und angewendet,

In Teil 3 wird das Erlernte im *Bruchrechnen* zur Anwendung gebracht.

1.2 Teil 2

Wir sind im **Teil 2** der Trilogie und hier geht es um das Entwickeln einer weiteren Möglichkeit zur Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades:

der Klammeransatz

Auch dieser Ansatz zur Faktorzerlegung wird dir später sehr hilfreich sein, unter anderem im Bereich des Bruchrechnens, des Vereinfachens von Schlussresultaten, usw.

Du wirst den Aufgabenstellungen folgend selbständig den Ansatz bei dieser Möglichkeit herleiten können. Das heisst, dass du durch das Ausführen der folgenden Aufgaben die Regelmässigkeiten, die zum *Klammeransatz* führen, erkennen und in der Faktorzerlegung, insbesondere den schönen Beispielen, zur Anwendung bringen wirst.

Und vergiss auch hier nicht das ***Wichtigste:***
Im letzten Kapitel deine Erkenntnisse zusammenzutragen ...

2 Das Erkennen der Regelmässigkeiten

2.1 für das konstante Glied im Polynom 2. Grades

Multipliziere die folgenden Produkte aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest, *alle* Schritte ausführst, vereinfachst und abschliessend *das konstante Glied* doppelt unterstreichst:

1. $(a+1)(a+2) = a \cdot a + a \cdot 2 + 1 \cdot a + 1 \cdot 2 = a^2 + 3a + \underline{\underline{2}}$

2. $(r+3)(r+6) = r \cdot r + r \cdot 6 + 3 \cdot r + 3 \cdot 6 = r^2 + 9r + \underline{\underline{18}}$

3. $(b+2)(b+4) = b \cdot b + b \cdot 4 + 2 \cdot b + 2 \cdot 4 = b^2 + 6b + \underline{\underline{8}}$

4. $(x+6)(x+6) = \ \ldots\ldots\ = x^2 + 12x + \underline{\underline{36}}$

5. $(c+4)(c+12) = \ \ldots\ldots\ = c^2 + 16c + \underline{\underline{48}}$

6. $(y+8)(y+9) = \ \ldots\ldots\ = y^2 + 17y + \underline{\underline{72}}$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen *das konstante Glied* des ausgerechneten Produktes direkt hin:

(a) $(a+3)(a+5) \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15$

(b) $(r+2)(r+3) \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$

(c) $(d+12)(d+11) \Rightarrow 12 \cdot 11 = 132$

(d) $(y+7)(y+6) \Rightarrow 42$

(e) $(r+4)(r+4) \Rightarrow 16$

(f) $(e+3)(e+9) \Rightarrow 27$

Multipliziere wieder aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest und *so lange alle* Schritte ausführst, bis du das *konstante Glied* direkt hinschreiben kannst:

7. $(a+1)(a-2) = a \cdot a + a \cdot (-2) + 1 \cdot a + 1 \cdot (-2) = a^2 - a - 2 \;\Rightarrow (-2)$

8. $(r-3)(r+6) = r \cdot r + r \cdot 6 + (-3) \cdot r + (-3) \cdot 6 = r^2 + 3r - 18 \;\Rightarrow (-18)$

9. $(b+5)(b-4) = b \cdot b + b \cdot (-4) + 2 \cdot b + 5 \cdot (-4) = b^2 + b - 20 \;\Rightarrow (-20)$

10. $(x-7)(x+6) = \;\ldots\ldots\; = x^2 - x - 42 \;\Rightarrow (-42)$

11. $(c+14)(c-7) = \;\ldots\ldots\; = c^2 + 7c - 98 \;\Rightarrow (-98)$

12. $(y-2)(y+2) = \;\ldots\ldots\; = y^2 - 4 \;\Rightarrow (-4)$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen *das konstante Glied* des ausgerechneten Produktes direkt hin:

(g) $(a+3)(a-5) \;\Rightarrow 3 \cdot (-5) = (-15)$
(h) $(r-2)(r+3) \;\Rightarrow (-2) \cdot 3 = (-6)$
(i) $(d+12)(d-11) \;\Rightarrow 12 \cdot (-11) = (-132)$
(j) $(y-7)(y+6) \;\Rightarrow (-42)$
(k) $(r-4)(r+4) \;\Rightarrow (-16)$
(l) $(e+9)(e-9) \;\Rightarrow (-81)$

Multipliziere wieder so lange aus, bis du *das konstante Glied* direkt hinschreiben kannst:

13. $(a-1)(a-2) = a \cdot a + a \cdot (-2) + (-1) \cdot a + (-1) \cdot (-2) = a^2 - 3a + 2 \;\Rightarrow 2$

14. $(r-3)(r-6) = r \cdot r + r \cdot (-6) + (-3) \cdot r + (-3) \cdot (-6) = r^2 - 9r + 18 \;\Rightarrow 18$

15. $(b-5)(b-4) = b \cdot b + b \cdot (-4) + (-5) \cdot b + (-5) \cdot (-4) = b^2 - 9b + 20 \;\Rightarrow 20$

16. $(x-7)(x-6) = \;\ldots\ldots\; = x^2 - 13x + 42 \;\Rightarrow 42$

17. $(c-14)(c-7) = \;\ldots\ldots\; = c^2 - 21c + 98 \;\Rightarrow 98$

18. $(y-4)(y-4) = \;\ldots\ldots\; = y^2 - 8y + 16 \;\Rightarrow 16$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen *das konstante Glied* des ausgerechneten Produktes direkt hin:

(m) $(a-3)(a-5) \;\Rightarrow (-3) \cdot (-5) = 15$

(n) $(r-2)(r-3) \;\Rightarrow (-2) \cdot (-3) = 6$

(o) $(d-12)(d-11) \;\Rightarrow (-12) \cdot (-11) = 132$

(p) $(y-7)(y-6) \;\Rightarrow 42$

(q) $(r-4)(r-4) \;\Rightarrow 16$

(r) $(e+3)(e-9) \;\Rightarrow -27$

2.2 Die Regel für das konstante Glied

Wir haben drei Fälle unterschieden und wollen das auch in unserer Zusammenstellung für die Berechnung des konstanten Gliedes berücksichtigen:

- $(a+x)(a+y) \Rightarrow$ das konstante Glied ist gleich $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
- $(a+x)(a-y) \Rightarrow$ das konstante Glied ist gleich .....
- $(a-x)(a+y) \Rightarrow$ das konstante Glied ist gleich .....
- $(a-x)(a-y) \Rightarrow$ das konstante Glied ist gleich .....

Da wir Differenzen auch als Summen darstellen können

$(a+x)(a-y) = (a+x)(a+(-y))$ und $(a-x)(a+y) = (\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

müssen wir uns nur die erste Regel merken und die Vorzeichenregeln bei Produkten berücksichtigen:

> *Das ausgerechnete Produkt von* $(a+x)(a+y)$ *hat als konstantes Glied das Produkt der Summanden* x *und* y*, unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel für Produkte.*

Aufgaben 2.1 *Bestimme* das konstante Glied *des ausgerechneten Produktes:*

1. $(u+3)(u+33) \Rightarrow 99$
2. $(v-25)(v+12) \Rightarrow (-30)$
3. $(w+22)(w-22) \Rightarrow (-484)$
4. $(z-5)(z-5) \Rightarrow 25$
5. $(a+t)(a-5q) \Rightarrow -5aq$
6. $(b-(5r)^2)(b+3s^2) \Rightarrow -75r^2s^2$

2.3 für den linearen Koeffizienten im Polynom 2. Grades

Multipliziere die folgenden Produkte aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest, *alle* Schritte ausführst, vereinfachst und abschliessend *den linearen Koeffizienten* doppelt unterstreichst:

1. $(a+1)(a+2) = a \cdot a + a \cdot 2 + 1 \cdot a + 1 \cdot 2 = a^2 + \underline{\underline{3}}a + 2$

2. $(r+3)(r+6) = r \cdot r + r \cdot 6 + 3 \cdot r + 3 \cdot 6 = r^2 + \underline{\underline{9}}r + 18$

3. $(b+3)(b+5) = b \cdot b + b \cdot 5 + 3 \cdot b + 3 \cdot 5 = b^2 + \underline{\underline{8}}r + 15$

4. $(x+8)(x+8) = \ \ldots\ldots\ = x^2 + \underline{\underline{16}}x + 64$

5. $(c+3)(c+11) = \ \ldots\ldots\ = c^2 + \underline{\underline{14}}c + 33$

6. $(y+7)(y+8) = \ \ldots\ldots\ = y^2 + \underline{\underline{15}}y + 56$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen *den linearen Koeffizienten* des ausgerechneten Produktes direkt hin:

(a) $(a+3)(a+5) \Rightarrow 3+5=8$

(b) $(r+2)(r+3) \Rightarrow 2+3=5$

(c) $(d+1)(d+2) \Rightarrow 1+2=3$

(d) $(r+4)(r+4) \Rightarrow 8$

(e) $(y+15)(y+16) \Rightarrow 31$

(f) $(e+21)(e+17) \Rightarrow 38$

Multipliziere die folgenden Produkte aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest und *so lange alle* Schritte ausführst, bis du *den linearen Koeffizienten* direkt hinschreiben kannst:

7. $(a+1)(a-2) = a \cdot a + a \cdot (-2) + 1 \cdot a + 1 \cdot (-2) = a^2 - a - 2 \;\Rightarrow (-1)$

8. $(r-3)(r+6) = r \cdot r + r \cdot 6 + (-3) \cdot r + (-3) \cdot 6 = r^2 + 3r - 18 \;\Rightarrow 3$

9. $(b+16)(b-21) = b \cdot b + b \cdot (-21) + 16 \cdot b + 16 \cdot (-21) = b^2 - 5b - 336 \;\Rightarrow (-5)$

10. $(x-7)(x+18) = \;\ldots\ldots\; = x^2 + 11x - 126 \;\Rightarrow 11$

11. $(c+21)(c-7) = \;\ldots\ldots\; = c^2 + 14c - 147 \;\Rightarrow 14$

12. $(y-9)(y+9) = \;\ldots\ldots\; = y^2 - 81 \;\Rightarrow 0$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen *den linearen Koeffizienten* des ausgerechneten Produktes direkt hin:

(g) $(a+3)(a-5) \;\Rightarrow 3 + (-5) = (-2)$
(h) $(r-2)(r+3) \;\Rightarrow (-2) + 3 = 1$
(i) $(d+12)(d-11) \;\Rightarrow 12 + (-11) = 1$
(j) $(r+4)(r-4) \;\Rightarrow 0$
(k) $(y-17)(y+16) \;\Rightarrow (-1)$
(l) $(e+9)(e-9) \;\Rightarrow 0$

Multipliziere die folgenden Produkte aus, in dem du das Distributivgesetz mehrfach anwendest und *so lange alle* Schritte ausführst, bis du *den linearen Koeffizienten* direkt hinschreiben kannst:

13. $(a-1)(a-2) = a \cdot a + a \cdot (-2) + (-1) \cdot a + (-1) \cdot (-2) = a^2 - 3a + 2 \;\Rightarrow (-3)$

14. $(r-3)(r-6) = r \cdot r + r \cdot (-6) + (-3) \cdot r + (-3) \cdot (-6) = r^2 - 9r + 18 \;\Rightarrow (-9)$

15. $(b-35)(b-45) = b \cdot b + b \cdot (-45) + (-35) \cdot b + (-35) \cdot (-45) = b^2 - 80b + 1575 \;\Rightarrow (-80)$

16. $(x-17)(x-61) = \;\ldots\ldots\; = x^2 - 78x + 1037 \;\Rightarrow (-78)$

17. $(c-24)(c-37) = \;\ldots\ldots\; = c^2 - 61c + 888 \;\Rightarrow (-61)$

18. $(y-41)(y-41) = \;\ldots\ldots\; = y^2 - 82y + 1681 \;\Rightarrow (-82)$

Schreibe nun aufgrund deiner Erfahrungen aus den obigen Beispielen *den linearen Koeffizienten* des ausgerechneten Produktes direkt hin:

(m) $(a-3)(a-5) \;\Rightarrow (-3) + (-5) = (-8)$

(n) $(r-2)(r-3) \;\Rightarrow (-2) + (-3) = (-5)$

(o) $(d-21)(d-11) \;\Rightarrow -21) + (-11) = (-32)$

(p) $(d+21)(d+11) \;\Rightarrow 32$

(q) $(y-123)(y-321) \;\Rightarrow (-444)$

(r) $(e-9)(e-9) \;\Rightarrow (-18)$

2.4 Die Regel für den linearen Koeffizienten

Wir haben drei Fälle unterschieden und wollen das auch in unserer Zusammenstellung für die Berechnung des linearen Koeffizienten berücksichtigen:

- $(a+x)(a+y) \Rightarrow$ der lineare Koeffizient ist gleich .....
- $(a+x)(a-y) \Rightarrow$ der lineare Koeffizient ist gleich .....
- $(a-x)(a+y) \Rightarrow$ der lineare Koeffizient ist gleich .....
- $(a-x)(a-y) \Rightarrow$ der lineare Koeffizient ist gleich .....

Da wir Differenzen auch hier als Summen darstellen können, müssen wir uns auch für den linearen Koeffizient nur die erste Regel merken und die Vorzeichenregeln bei Summen berücksichtigen:

> *Das ausgerechnete Produkt von* $(a+x)(a+y)$ *hat als linearen Koeffizienten die Summe der Summanden* x *und* y*, unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel für Summen.*

Aufgaben 2.2 *Bestimme* nur den linearen Koeffizienten *des ausgerechneten Produktes:*

1. $(u+3)(u+33) \Rightarrow 36$
2. $(v-25)(v+12) \Rightarrow (-13)$
3. $(w+22)(w-22) \Rightarrow 0$
4. $(z-5)(z-5) \Rightarrow (-10)$
5. $(a-7z)(a+5^2) \Rightarrow -7z+25 = 25-7z$
6. $(b+(-5)^3)(b-2t^2) \Rightarrow -125-2t^2$

3 Die letzten Aufgaben zum Ausmultiplizieren:

Aufgaben 3.1 *Aufgrund deiner Erfahrungen kannst du die folgenden Terme direkt als* ausgerechnetes Produkt *darstellen,* ohne *den Umweg über das mehrfache Anwenden des Distributivgesetzes und des Vereinfachens machen zu müssen:*

Multipliziere aus:
Verwende dein Wissen über den linearen Koeffizienten und das konstante Glied und schreibe das Resultat direkt hin.

1. $(a+5)(a+18) = a^2 + 23a + 90$
2. $(b-1)(b+1) = b^2 - 1$
3. $(c-12)(c+2) = c^2 - 10c - 24$
4. $(d-22)(d+33) = d^2 + 11d - 726$
5. $(e-5)(e-18) = e^2 - 23e + 90$
6. $(f+14)(f+15) = f^2 + 29f + 210$
7. $(g-6)(g+18) = g^2 + 12g - 108$
8. $(h+13)(h-31) = h^2 - 18h - 403$
9. $(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y) \cdot a + xy$
10. $(a+x)(a-x) = a^2 - x^2$
11. $(a-x)(a+x) = a^2 - x^2$
12. $(a-x)(a-y) = a^2 + (-x-y) \cdot a + xy = a^2 - (x+y)a + xy$

4 Faktorzerlegung

Wir kommen nun zur Anwendungen unseres oben erarbeiteten Wissens für die *Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades*:

Für das *Ausmultiplizieren* haben wir gelernt,

$$(a+2)(a-3) \quad \overset{ausmultipizieren}{\rightsquigarrow} \quad a^2 - a - 6$$

dass beim ausgerechneten Produkt

- *das konstante Glied* gleich dem Produkt der „Summanden“ ist:
$$2 \cdot (-3) \overset{(1)}{=} (-6)$$

- *der lineare Koeffizient* gleich der Summe der „Summanden“ ist:
$$2 + (-3) \overset{(2)}{=} (-1)$$

Für die *Faktorzerlegung* kehren wir das Vorgehen des Ausmultiplizierens um:

$$a^2 - a - 6 \quad \overset{faktorisieren}{\rightsquigarrow} \quad (a + x\ )(a + y)\ ,\ x, y\ = ?$$

Das hat in der Anwendung die folgenden Konsequenzen:

Für die Zerlegung des Polyoms $a^2 - a - 6$ in zwei Faktoren suchen wir zwei Zahlen x und y, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- *Das Produkt ist gleich dem konstanten Glied:*
  in unserem Beispiel $x \cdot y \overset{(1)}{=} (-6)$
- *Die Summe ist gleich dem linearen Koeffizienten:*
  in unserem Beispiel $x + y \overset{(2)}{=} (-1)$

Durch *pröbeln* lassen sich zwei Zahlen finden, welche *beide* Gleichungen erfüllen:
Das sind $x = 2$ und $y = (-3)$
und somit ist die Lösung $(a+2)(a+(-3)) = \underline{\underline{(a+2)(a-3)}}$.

Oder umgekehrt sind es $x = (-3)$ und $y = 2$
und somit ist die Lösung $(a+(-3))(a+2) = \underline{\underline{(a-3)(a+2)}}$.

Und welche Lösung ist nun die richtige Lösung: .....

4.1 Aufbauende Beispiele zur Automatisierung der Faktorzerlegung

Mit den folgenden Beispielen wollen wir das Vorgehen zur Faktorzerlegung eines Polynoms 2. Grades im Aufwand verkürzen und im Ablauf automatisieren.

Es geht in den folgenden Beispielen immer um die gleiche Aufgabe:

Zerlege das Polynom in zwei Faktoren

Beispiel 4.1 $a^2 + 5a - 6 = (a + x)(a + y), \quad \textit{mit } x, y \ = ?$

Das heisst, wir suchen zwei Zahlen für x und y, die folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{array}{lcccc} \textit{Die Summe ist gleich dem linearen Koeffizienten} & \Leftrightarrow & x + y & = & 5 \\ \textit{Das Produkt ist gleich dem konstanten Glied} & \Leftrightarrow & x \cdot y & = & (-6) \end{array}$$

Durch pröbeln erhalten wir: $x = \ 6$ *und* $y = (-1)$

und als Lösung:

$$a^2 + 5a - 6 = (a + 6)(a + (-1)) = \underline{\underline{(a + 6)(a - 1)}}$$

Beispiel 4.2 $a^2 + 5a + 6 = (a + x)(a + y), \quad \textit{mit } x, y \ = ?$

Das heisst, wir suchen zwei Zahlen für x und y, die folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{array}{lcccc} \textit{Die Summe ist gleich dem linearen Koeffizienten} & \Leftrightarrow & x + y & = & 5 \\ \textit{Das Produkt ist gleich dem konstanten Glied} & \Leftrightarrow & x \cdot y & = & 6 \end{array}$$

Durch pröbeln erhalten wir: $x = 2$ *und* $y = 3$

und als Lösung:

$$a^2 + 5a + 6 = \underline{\underline{(a + 2)(a + 3)}}$$

Beispiel 4.3 $a^2 + 8a + 15 = (a + x)(a + y)$

d.h. wir suchen zwei Zahlen x und y für die gelten:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 8 \\ x \cdot y & = & 15 \end{array}$$

Durch pröbeln erhalten wir: $x = 3$ *und* $y = 5$

und als Lösung:

$$a^2 + 8a + 15 = \underline{\underline{(a + 3)(a + 5)}}$$

Beispiel 4.4 $a^2 - 2a - 15 = (a + x)(a + y)$

d.h. wir suchen zwei Zahlen x und y für die gelten:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & (-2) \\ x \cdot y & = & (-15) \end{array}\right\} \Rightarrow x = (-5) \text{ und } y = 3$$

$\Rightarrow$ *als Lösung:*

$$a^2 - 2a - 15 = (a + (-5))(a + 3) = \underline{\underline{\mathbf{(a - 5)(a + 3)}}}$$

Beispiel 4.5 $a^2 + 2a - 15 = (a + r)(a + s)$

d.h. wir suchen zwei Zahlen r und s mit:

$$\left.\begin{array}{rcl} r + s & = & 2 \\ r \cdot s & = & (-15) \end{array}\right\} \Rightarrow r = 5 \text{ und } s = (-3)$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 15 = (a + 5)(a + (-3)) = \underline{\underline{(a + 5)(a - 3)}}$$

Beispiel 4.6 $x^2 + 7x + 12 = (x+q)(x+r)$

$$mit \quad \left.\begin{array}{rcl} q+r & = & 7 \\ q \cdot r & = & 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \; q = 3 \;\; und \;\; r = 4$$

$$\Rightarrow \; x^2 + 7x + 12 = \underline{\underline{(x+3)(x+4)}}$$

Beispiel 4.7 $x^2 - 22x + 121 = (x+a)(x+b)$

$$mit \quad \left.\begin{array}{rcl} a+b & = & (-22) \\ a \cdot b & = & 121 \end{array}\right\} \Rightarrow \; a = (-11) \;\; und \;\; b = (-11)$$

$$\Rightarrow \; x^2 - x - 121 = (x+(-11))(x+(-11)) = \underline{\underline{(x-11)(x-11) = (x-11)^2}}$$

Beispiel 4.8 $q^2 + q - 132 = (q+x)(q+y)$

$$mit \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x \cdot y & = & (-132) \end{array}\right\} \Rightarrow \; x = 12 \;\; und \;\; y = (-11)$$

$$\Rightarrow \; q^2 + q - 132 = (q+12)(q+(-11)) = \underline{\underline{(q+12)(q-11)}}$$

Beispiel 4.9 $v^2 - 2v - 143 = (v+a)(v+b)$

$$mit \quad \left.\begin{array}{rcl} a+b & = & (-2) \\ a \cdot b & = & (-143) \end{array}\right\} \Rightarrow \; a = (-13) \;\; und \;\; b = 11$$

$$\Rightarrow \; v^2 - 2v - 143 = (v+(-13))(v+11) = \underline{\underline{(v-13)(v+11)}}$$

Beispiel 4.10 $x^2 + 11x - 12 = (x+r)(x+s)$

$$mit \quad \left.\begin{array}{rcl} r+s & = & 11 \\ r \cdot s & = & (-12) \end{array}\right\} \Rightarrow \; r = 12 \;\; und \;\; s = (-1)$$

$$\Rightarrow \; x^2 + 11x - 12 = (x+12)(x+(-1)) = \underline{\underline{(x+12)(x-1)}}$$

Aufgaben 4.1 *Zerlege die Polynome in Faktoren:*

1. $a^2 + 4a + 3 = \ \ldots\ldots\ = (a+3)(a+1)$

2. $b^2 - 2b + 1 = \ \ldots\ldots\ = (b-1)(b-1) = (b-1)^2$

3. $q^2 - 5q - 50 = \ \ldots\ldots\ = (q-10)(q+5)$

4. $r^2 + 30r + 29 = \ \ldots\ldots\ = (r+1)(r+29)$

5. $t^2 - 2t - 99 = \ \ldots\ldots\ = (t-11)(t+9)$

6. $v^2 - v - 156 = \ \ldots\ldots\ = (v+12)(v-13)$

7. $x^2 + 26x + 105 = \ \ldots\ldots\ = (x+21)(x+5)$

8. $y^2 + 2y + 1 = \ \ldots\ldots\ = (y+1)(y+1) = (y+1)^2$

9. $a^2 + 2ab + b^2 = \ \ldots\ldots\ = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$

10. $b^2 + 3qb + 2q^2 = \ \ldots\ldots\ = (b+q)(b+2q)$

4.1.1 Noch einige mathematische Überlegungen

- Wir haben für den Klammeransatz eines Polynoms 2. Grades (in a) immer in den Klammern mit a begonnen:

$$a^2 + \clubsuit \cdot a + \spadesuit \;=\; (a+x)(a+y)$$

Beispiel 4.11 *Überlege warum ...*

und zerlege vollständig in Faktoren:

$$a^4 + a^2 - 20 = (a^2+5)(a^2-4) = (a^2+5)(a+2)(a-2)$$

- Wir haben nur die Faktorzerlegung von sogenannten *normierten* Polynomen 2. Grades behandelt, d.h. von Polynomen, wo der quadratische Koeffizient 1 ist. Auch nicht-normierte Polynome können mit dem gleichen Ansatz in Faktoren zerlegt werden:
Die Idee ist, dass wir aus dem Polynom einen gemeinsamen Faktor herausziehen, so dass ein normiertes Polynom entsteht, das wir dann mit unserem Wissen vollständig in Faktoren zerlegen können:

Beispiel 4.12 *Zerlege dazu vollständig in Faktoren:*

$$4x^2 + 4x - 48 = 4 \cdot (x^2 - x - 12) = 4 \cdot (x+4)(x-3)$$

- Vergiss die binomischen Formeln nicht.
  Wenn sie anwendbar sind bieten sie einen schnelleren Weg als mit dem Klammeransatz.

Beispiel 4.13 *Zerlege vollständig in Faktoren:* $h^2 - 16 = (h+4)(h-4)$

1. *mit dem Klammeransatz:*

2. *mit Hilfe der binomischen Formeln:*

Beispiel 4.14 *Zerlege vollständig in Faktoren:* $k^2 - 12k + 36 = (k-6)^2$

1. *mit dem Klammeransatz:*

2. *mit Hilfe der binomischen Formeln:*

- Beachte, dass sich nicht jedes Polyonom zerlegen lässt:

  Beispiel 4.15 $x^2 + 4$

  Beispiel 4.16 $a^2 + a + 1$

- Beachte, dass für eine Faktorzerlegung auch das *geschickte Klammersetzen* und das *Distributivgesetz* verwendet werden dürfen. Natürlich sind alle Methoden auch in allen möglichen Kombinationen anwendbar:

  Beispiel 4.17 *Bestimme für jeden Schritt die verwendete Methode oder das angewendete Gesetz:*

$$\begin{aligned} a^2 + ax - bx - b^2 &= a^2 - b^2 + ax - bx && (1)\\ &= (a+b)(a-b) + x(a-b) && (2)\\ &= \underline{\underline{(a-b)(a+b+x)}} && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^5 - 81a &= a(a^4 - 81) && (4)\\ &= a(a^2+9)(a^2-9) && (5)\\ &= \underline{\underline{a(a^2+9)(a+3)(a-3)}} && (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 + 4x - 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - (x^2 - 4x + 4) && (7)\\ &= (x^2+2)^2 - (x-2)^2 && (8)\\ &= (x^2 + 2 + x - 2)(x^2 + 2 - x + 2) && (9)\\ &= (x^2 + x)(x^2 - x + 4) && (10)\\ &= \underline{\underline{x(x+1)(x^2 - x + 4)}} && (11) \end{aligned}$$

5 Die schönen Beispiele:

Zum Abschluss noch einige schöne Beispiele, bei welchen ihr alle Methoden zur Faktorzerlegung anwenden könnt. Natürlich auch in Kombinationen und Mehrfach.
Es sind einige Beispiel dabei, wo ich sehr auf eure Lösungen gespannt bin ...

Aufgaben 5.1 *Zerlege vollständig in Faktoren und gib die angewendeten Methoden an:*

1. $3x^2 - 36x + 108 = 3 \cdot (x-6)^2$

2. $2b^2 + 6b - 56 = 2 \cdot (b-4)(b+7)$

3. $z^2 - 5tz + 4t^2 = (z-t)(z+t)$

4. $3a^2(b-2) - ab(2-b) + a(b-2) = a \cdot (b-2)(a+b+1)$

Aufgaben 5.2 *Zerlege vollständig in Faktoren und gib die angewendeten Methoden an:*

1. $-3z^4 + 6z^3 + 24z^2 = (-3z^2)(z-4)(z+2)$

2. $r^2 - 4s^2 + 12st - 9t^2 = (r+2s-3t)(r-2s+3t)$

3. $27ef - 18eg + 9f^2 - 12fg + 4g^2 = (3f-2g)(9e+3f-2g)$

4. $(a^2-1)^2 - (a+2)^2 = (a^2+a+1)(a^2-a-3)$

Aufgaben 5.3 *Zerlege weiterhin vollständig in Faktoren und gib die angewendeten Methoden an:*

1. $(a^2-1)^2-(a+1)^2 = \ \ldots \ = a(a+1)^2(a^-1)$

2. $(a^2-2)^2-(a+2)^2 = \ \ldots \ = a^2(a+1)(a^2-a-4)$

3. $(a^2+1)^2-(a+1)^2 = \ \ldots \ = a(a-1)(a^2+a+2)$

4. $a^4-(13a-30)^2 = \ \ldots \ = (a+15)(a-2)(a-10)(a-3)$

6 Links zu weiteren Aufgaben

- Auf www.sos-mathe.ch finden sich 22 Aufgaben mit Lösungshinweise.
- Auf www.mathematikalpha.de finden sich sehr viele Aufgaben, stufengerecht unterteilt, mit den Schlussresultaten aber ohne Lösungsweg.

7 Die Faktorzerlegung in *meinen* Worten