Analysis-Aufgaben: *Differentialgleichungen 5*

Eine Lernaufgabe

zu den reellwertigen Lösungen einer gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren charkteristisches Polynom komplexe Wurzeln hat.

- Notwendige Vorkenntnisse:
  - mathematische Begriffsbildung,
    (obigen Text solltest du verstehen!)
  - Potenzgesetze,
  - Quadratischen Gleichungen:
    Begriffe und Lösungsformel,
  - komplexe Zahlen:
    Definition und Darstellung, Euler'sche Formel,
  - Eigenschaften der Lösungen einer Differentialgleichung,

Wir beginnen mit der allgemeinen Darstellung einer gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

...

Wenn die zwei verschiedenen reellwertigen Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms λ_1 und λ_2 sind, lautet die Fundamentallösung:

...

Damit für die reellwertigen Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, muss das charakteristische Polynom folgende Eigenschaft erfüllen:

...

Im Falle von $\lambda_1 = \lambda_2$, muss für das charakteristische Polynom gelten

$$\ldots$$

und die daraus folgende Fundamentallösung lautet:

$$\ldots$$

Damit unser charakteristisches Polynom komplex konjugierte Lösung hat, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\ldots$$

Formuliere ein Beispiel eines charakteristischen Polynoms, welches zwei komplex konjugierte Lösungen hat

$$\ldots$$

und bestimme die zugehörige Differentialgleichung:

$$\ldots$$

Bestimme die Nullstellen deines charakteristischen Polynoms und bestimme, analog zum Vorgehen im reellen Fall, Basislösungen zu deiner Differentialgleichung:

$$\ldots$$

Verifiziere die Gültigkeit deiner Basislösungen:
(Verwende dazu, dass für die Ableitung im Komplexen gilt: $\frac{d}{dt}e^{rt} = re^{rt}, r \in \mathbb{C}$)

$$\ldots$$

und formuliere, wieder in Analogie zur Vorgehensweise im Reellen, eine Fundamentallösung für deine Differentialgleichung:

$$\ldots$$

Forme nun deine Fundamentallösung mit Hilfe der Potenzgesetze und der Euler'schen Formel auf folgende Form um:

$$x(t) = C_1 e^{at}(\cos bt + \imath \sin bt) + C_2 e^{at}(\cos bt - \imath \sin bt)$$

mit $\lambda_{1,2} = a \pm \imath b$ als die Nullstellen von $p(\lambda)$.

Mit Hilfe der *Eigenschaften von Lösungen einer homogenen Differentialgleichung* kannst du nun

> aus der Summe deiner Basislösungen (in der *cis*-Darstellung) und einem geschickt gewählten Vielfachen eine *reelle* Basislösung in der Form $e^{at}\cos bt$ formulieren …

> aus der Differenz deiner Basislösungen (ebenfalls in der *cis*-Darstellung) und einem geschickt gewählten Vielfachen eine weitere *reelle* Basislösung in der Form $e^{at}\sin bt$ formulieren …

und damit eine reellwertige Lösung deiner gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom komplexe Wurzeln hat, formulieren:

$$\ldots$$

Aufgaben:

1. Zeige mit Hilfe der Euler'schen Formeln:

$$\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \;, \qquad \sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}$$

2. Beweise weiter: $e^{\pi\imath/2} = \imath \;, \quad e^{\pi\imath} = -1 \;, \quad e^{2\pi\imath} = 1$

3. Bestimme die reellwertigen Lösung für folgendes AWP:

$$16\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 145x(t) = 0, \qquad x(0) = -2, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

   und stelle die Lösung graphisch dar.

4. Bestimme die allgemeine reelle Lösung von

$$\text{i)} \;\; \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad \text{und} \quad \text{ii)} \;\; \ddot{x} + 9x = 0$$

   und vergleiche die graphischen Darstellungen mit der Lösung aus 3. Was fällt auf?

5. Beweise die folgende Aussage:

   Seien $\lambda_{1,2}$ die komplex-konjugierten Lösungen des charakteristischen Polynoms einer linearen, gewöhnlichen, homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann ist

$$\tilde{x}(t) = \tilde{C_1} \cdot e^{Re(\lambda)\cdot t} \cos(Im(\lambda) \cdot t) + \tilde{C_2} \cdot e^{Re(\lambda)\cdot t} \sin(Im(\lambda) \cdot t)$$

   eine reelle Fundamentallösung der Differentialgleichung.

   Beweise durch Verifikation *und* konstruktiv/herleitend.