Die Partialsummen arithmetischer & geometrischer Reihen

eine kooperative digitale Lernaufgabe

für die gymnasiale Oberstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

12. März 2021

Die Partialsummen arithmetischer und geometrischer Reihen - *eine digitale kooperative Lernaufgabe*

Diese *Lernaufgabe* ist ein Auszug aus meinem Skript zu den *Folgen & Reihen*:

> Das Skript ist zufinden unter
>
> https://ronaldbalestra.ch/dokumente/analysis/folgen-reihen/Theorie-MNProfil.pdf
>
> Mit den zugehörigen Aufgaben & Lösungen:
>
> https://ronaldbalestra.ch/analysis/folgen-und-reihen/

Der folgende Einstieg in das Thema der *Reihen* ist aufgebaut auf Grundkenntnisse zu den *Folgen* und als *Selbststudium zu zweit* gedacht.

Arbeitsanleitung:

Die Einführung in das Thema müsst ihr gemeinsam *durcharbeiten*, das heisst also:

- *Diskutiert* die Definitionen & Bemerkungen,
- *Rechnet* die Beispiele nach & formuliert eigene,
- *Arbeitet* die Beweise durch,
- *Notiert* Fragen & Unklarheiten im *F&A-Dokument*,
- *Bearbeitet* die Fragen eurer MitschülerInnen im *F&A-Dokumenten*.

- Im Klassenverband werden wir nur noch die *offenen Fragen* aus dem *F&A-Dokument* behandelt !

Beachte:
die Links zum *F&A-Dokument* müssen jeweils *neu* gesetzt werden.

Def.: Eine Folge a_n heisst eine **arithmetische Folge** $:\Leftrightarrow$

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad d \in \mathbb{R},\ d = konst.$$

Bem.:

- Die Eigenschaft einer arithmetischen Folge ist, dass die Differenz d zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant ist.
- *Bsp.:* $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$.
  Die konstante Differenz in diesem Beispiel ist $d = 3$.
- *Eigene Beispiele:*
  -
  -
- Aequivalent zur *rekursiven Definition* einer arithmetischen Folge gilt auch die folgende *explizite Definition* :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- Definiert eigene Beispiele in der *expliziten Darstellung* und stellt sie in der *aufzählenden Form* dar:
  -
  -
- Fragen/ Unklarheiten in das *F & A - Dokument* ...

Def.: Eine Folge a_n heisst eine **geometrische Folge** $:\Leftrightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \in \mathbb{R},\ q = konst.$$

Bem.:

- Die Eigenschaft einer geometrischen Folge ist, dass der Quotient q zweier aufeinanderfolgender Folgeglieder konstant ist.
- *Bsp.:* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$.
  Der konstante Quotient in diesem Beispiel ist $q = \frac{1}{2}$.
- *Eigene Beispiele:*
  - ◦
  - ◦
- Aequivalent zur *rekursiven Definition* einer geometrischen Folge gilt auch die folgende *explizite Definition* :

  $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Definiert eigene Beispiele in der *expliziten Darstellung* und stellt sie in der *aufzählenden Form* dar:
  - ◦
  - ◦
- Fragen/ Unklarheiten in das *F & A - Dokument* …

Um den Begriff der *Partialsumme* elegant definieren zu können, wollen wir eine neue Schreibweise, das *Summenzeichen*, an den folgenden Beipsielen einführen:

Beispiel 1

- $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5$
- $\sum_{k=5}^{45} 3k = 3\cdot 5+3\cdot 6+3\cdot 7+\ldots+3\cdot 45$
- $\sum_{r=1}^{10} \dfrac{2r^2}{10} = 0.2+0.8+1.8+3.2+\ldots+20$

<u>*Bem.:*</u>

- Für den Summationsindex (in den obigen Beispielen k oder r) werden nur natürliche Zahlen verwendet.
- Sprechweise: "Die Summe aller $3k$ für $k=5$ bis 45."
- Formuliert eigene Beispiele mit dem Summenzeichen und schreibt die Summe aus:
    -
    -
    -
- Fragen/ Unklarheiten in das *F & A - Dokument* ...

Wir können nun eine neuen Begriff definieren:

Def.:	Sei a_n eine beliebige Folge. $\mathbf{s_k} := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$ heisst die **k-te Teilsumme** oder die **k-te Partialsumme** von a_n.

Beispiel 2 Wir definieren $x_n := 2n + 1$
Dann gilt:

1. die 5-te Partialsumme von x_n ist 35.
2. $\sum_{n=1}^{8} x_n = 80$

Verifiziere diese beiden Beispiele & formuliert mit einer neuen Folge zwei eigene Beispiele:

Die Partialsummen von arithmetischen und von geometrischen Folgen lassen sich auf einfache Weise wie folgt berechnen:

Satz: Sei a_n eine arithmetische Folge.
Dann gilt: $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$

Beweis:
$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{n=1}^{k} a_n \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k \\
&= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (k-1) \cdot d) \\
&= k \cdot a_1 + d(1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1)) \\
&= k \cdot a_1 + d\frac{(k-1) \cdot k}{2} \\
&= \frac{k}{2} \cdot (2a_1 + d \cdot (k-1)) \\
&= \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_1 + d \cdot (k-1)) \\
&= \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k) \qquad \Box
\end{aligned}$$

Beispiel 3 $a_n = (4, 11, 18, 25, \ldots)$

$\Rightarrow a_n$ ist eine arithmetische Folge mit $d = 7$ und $a_1 = 4$
$\Rightarrow a_n = 4 + (n-1) \cdot 7$
$\Rightarrow a_4 = 25$
$\Rightarrow a_{17} = \ldots$
$\Rightarrow s_4 = 58$
$\Rightarrow s_{17} = \ldots$

Euer eigenes Beispiel:

Satz: Sei a_n eine geometrische Folge.
Dann gilt: $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}$, mit $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Beweis:
$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^{k} a_n \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k \\ &= a_1 + q \cdot a_1 + q \cdot qa_1 + q \cdot qqa_1 + \ldots + \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{(k-1)-mal} \cdot a_1 \\ &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} a_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{k-1} \\ (1-q) \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n &= (1-q) \cdot (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{k-1}) \\ (1-q) \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n &= (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{k-1}) \ \ldots \\ &\quad - (a_1 \cdot q + a_1q \cdot q + a_1q^2 \cdot q + \ldots + a_1q^{k-1} \cdot q) \\ (1-q) \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n &= a_1 - a_1q^{k-1} \cdot q \\ (1-q) \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n &= a_1(1-q^k) \\ \sum_{n=1}^{k} a_n &= a_1 \cdot \frac{(1-q^k)}{(1-q)} \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel 4 $a_n = (1, 1.5, 2.25, 3.375, \ldots)$

$\Rightarrow a_n$ ist eine geometrische Folge mit $q = 1.5$ und $a_1 = 1$
$\Rightarrow a_n = 1 \cdot 1.5^{n-1}$
$\Rightarrow a_4 = 3.375$
$\Rightarrow a_{17} = \ldots$
$\Rightarrow s_4 = 8.125$
$\Rightarrow s_{17} = \ldots$

Euer eigenes Beispiel:

Meine Zusammenfassung