Funktionen
&
die zugehörige Inverse

Ein Unterrichtspuzzle in 7 Runden

Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

19. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

Ein Unterrichtspuzzle -
Einführung, Einteilungen & Termine

Um was geht's?

Bei einem *Puzzle* geht es darum, sich über verschiedene *Runden* in ein Thema einzuarbeiten und anschliessend sein Wissen und seine Erfahrung den MitschülerInnen weiterzugeben.
Es wird weitgehend in Gruppen gearbeitet.

Die verschiedenen Runden kurz vorgestellt:

- In der *Aktivierungsrunde* werden die notwendigen (und schon vorhandenen) Kenntnisse repetiert & (re)aktiviert.
- In den *Expertenrunden* erfolgt das Einarbeiten in das neue Thema. Am Ende dieser Runde musst du themenspeziefische Aufgaben soweit verstanden haben, dass du sie deinen MitschülerInnen erklären und vorlösen kannst.
- In den *Unterrichtsrunden* geht es dann darum, dass du dein Wissen und deine Erfahrungen an diejenigen MitschülerInnen weitergibst, welche nicht in deiner Gruppe gewesen sind.

Dieses Puzzle werden wir erweitern, mit

- einer *Klassenrunde*, in welcher wir im Klassenverband Informationen und Erkenntnisse austauschen und auf einige weiterführende Fragen eingehen werden und
- einer *Schlussrunde*, in welcher eine Aufgabe zu lösen ist, welche die wichtigsten Punkte des Themas beinhaltet.

Das *Ziel* dieses Puzzles ist, die *Inverse* oder die *Umkehrfunktion*, wie sie auch genannt wird, kennenzulernen.
Das schliesst neben der Definition die mathematische Bedeutung und geometrische Interpretation ein. Weiter sollen wieder ein grapihikfähiger Taschenrechner oder die freeware *GeoGebra* eingesetzt werden.

Die Themen der Runden

- Aktivierungsrunde - *Repetitionen*
- Expertenrunde - *die Inverse*
- Unterrichtsrunde - *für affine Funktionen*
- Klassenrunde - *allgemeine Betrachtungen*
- Expertenrunde - *für spezielle Funktionen*
- Unterrichtsrunde - *für spezielle Funktionen*
- Schlussrunde

Der Zeitrahmen

Im folgenden werden die zur Verfügung gestellten Unterrichtsstunden und die Themen angegeben, welcher bis zum angegeben Datum bearbeiten werden muss:

Datum	**Thema**

Was nicht in den Unterrichtsstunden erledigt wird, muss als Hausaufgeben gemacht werden.

Die Gruppeneinteilungen

- für Runde 2:

	Gruppe I	**Gruppe II**	**Gruppe III**	**Gruppe IV**	**Gruppe V**
a	...	...	...	...	...
b	...	...	...	...	...
c	...	...	...	...	...
d	...	...	...	...	...
e	...	...	...	...	...

- für Runde 3:
  Gruppe I setzt sich zusammen aus: Ia, IIb, IIIc, IVd, Ve;
  Gruppe II setzt sich zusammen aus: Ib, IIc, IIId, IVe, Va;
  Gruppe III setzt sich zusammen aus: Ic, IId, IIIe, IVa, Vb;
  Gruppe IV setzt sich zusammen aus: Id, IIe, IIIa, IVb, Vc;
  Gruppe V setzt sich zusammen aus: Ie, IIa, IIIb, IVc, Vd.

- für Runde 4:
  Gruppe I setzt sich zusammmen aus: Ia, IIc, IIIe, IVb, Vd;
  Gruppe II setzt sich zusammen aus: Ib, IId, IIIa, IVc, Ve;
  Gruppe III setzt sich zusammen aus: Ic, IIe, IIIb, IVd, Va;
  Gruppe IV setzt sich zusammen aus: Id, IIa, IIIc, IVe, Vb;
  Gruppe V setzt sich zusammen aus: Ie, IIb, IIId, IVa, Vc.

- für Runde 5:
  Gruppe I setzt sich zusammmen aus: Ia, IId, IIIb, IVe, Vc;
  Gruppe II setzt sich zusammen aus: Ib, IIe, IIIc, IVa, Vd;
  Gruppe III setzt sich zusammen aus: Ic, IIa, IIId, IVb, Ve;
  Gruppe IV setzt sich zusammen aus: Id, IIb, IIIe, IVc, Va;
  Gruppe V setzt sich zusammen aus: Ie, IIc, IIIa, IVd, Vb.

- für Runde 6:
  Gruppe I setzt sich zusammmen aus: Ia, IIe, IIId, IVc, Vb;
  Gruppe II setzt sich zusammen aus: Ib, IIa, IIIe, IVd, Vc;
  Gruppe III setzt sich zusammen aus: Ic, IIb, IIIa, IVe, Vd;
  Gruppe IV setzt sich zusammen aus: Id, IIc, IIIb, IVa, Ve;
  Gruppe V setzt sich zusammen aus: Ie, IId, IIIc, IVb, Va.

1 Aktivierungsrunde - *Repetitionen*

Zur Vorbereitung für den Einstieg in das neue Thema sollst du diesmal moch selbständig in einer *Hausaufgabe* die folgenden Grundlagen repetieren und dir in Erinnerung rufen:

- Erkläre die folgenden *Begriffe:*
  - **Funktion**
  - **Argument**
  - **Funktionswert**
  - **Wertebereich**
  - **Definitionsbereich**

- *Spezielle Funktionstypen:*

  Erstelle für die folgenden Funktionstypen jeweils

  - die Funktionsgleichung und Funktionsvorschrift,
  - die graphische Darstellung und
  - eine Zusammenfassung der charakteristischen Grössen.

  - **Affine Funktionen:**

  - **Quadratische Funktionen:**

- **Potenzfunktionen:**

- **Exponential- & Logarithmusfunktionen.**

2 Expertenrunde - *die Inverse*

Wir beginnen nun mit den Gruppenarbeiten entsprechend den Einteilungen für Runde 2:

Als Einstieg habt ihr 10 Minuten Zeit eure Hausaufgaben zu besprechen und allfällige Unklarheiten zu klären.

Meine Bemerkungen, Ergänzungen, Überlegungen zu den Hausaufgaben: ...

2.1 Mathematisch betrachtet

Das Ziel dieser Runde ist den Begriff der Inversen einzuführen, die mathematische Bedeutung und erste Beispiele kennenzulernen:

<u>Def.:</u>	Wir gehen von einer beliebigen Funktion $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ aus. Die **Inverse zu** f ist die Funktion $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, die jedem Funktionswert von f das ursprüngliche Argument zuordnet.

Beispiel 2.1 Wir gehen von der folgenden Funktion aus:

$$f : \{2, 4, 6, 8, 10\} \to \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

mit der gegebenen Funktionsvorschrift:

$$\begin{aligned} 2 &\overset{f}{\mapsto} 1 \\ 4 &\overset{f}{\mapsto} 3 \\ 6 &\overset{f}{\mapsto} 7 \\ 8 &\overset{f}{\mapsto} 5 \\ 10 &\overset{f}{\mapsto} 9 \end{aligned}$$

Dann gilt für die zugehörige Umkehrfunktion g

$$g : \{1, 3, 5, 7, 9\} \to \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

die folgende Funktionsvorschrift:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{g}{\mapsto} 2 \\ 3 &\overset{g}{\mapsto} 4 \\ 5 &\overset{g}{\mapsto} 8 \\ 7 &\overset{g}{\mapsto} 6 \\ 9 &\overset{g}{\mapsto} 10 \end{aligned}$$

Beispiel 2.2 Wir gehen von der folgenden Funktion aus:

$$h : \{-1, 0, a, t\} \to \{a, b, 1, 0\}$$

mit der gegebenen Funktionsvorschrift:

$$\begin{aligned} -1 &\overset{h}{\mapsto} a \\ 0 &\overset{h}{\mapsto} 0 \\ a &\overset{h}{\mapsto} b \\ t &\overset{h}{\mapsto} 1 \end{aligned}$$

Dann gilt für die zugehörige Umkehrfunktion i

$$i : \{\ \ldots\ldots\ \} \to \{\ \ldots\ldots\ \}$$

die folgende Funktionsvorschrift:

$$\begin{aligned} a &\overset{i}{\mapsto} -1 \\ b &\overset{i}{\mapsto} a \\ 1 &\overset{i}{\mapsto} t \\ 0 &\overset{i}{\mapsto} 0 \end{aligned}$$

Bem.:

- Die Inverse von f wird, wie schon in der Einleitung bemerkt, auch die **Umkehrfunktion** zu f genannt.
- Als Schreibweise für *die Umkehrfunktion von f* verwenden wir f^{-1}.
  Beachte: $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$
- Die Inverse f^{-1} ist nach Definition auch eine *Funktion* und erfüllt somit insbesondere auch die allgemeinen Eigenschaften einer Funktion, d.h:

  $f^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ ist eine ………… , die jedem ………… aus $\mathbb{B}$ ……… ein ………… in $\mathbb{A}$ ………… .

Aufgaben 1 *Definiert selber eine Funktionsvorschrift für h, mit den folgenden Definitions- und Wertebereichen*

$$h : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{-3, 1, 33, 0.5, t\}$$

und bestimmt anschliessend die zugehörige Inverse mit der zugehörigen Funktionsvorschrift.

Wir wollen nun noch den Begriff der *Umkehrfunktion/Inversen* kurz und elegant in der mathematischen Schreibweise definieren:

Def.:	Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ eine beliebige Funktion. $\Rightarrow\ f^{-1} : B \to A$ mit $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$ heisst die zu f **Inverse**.

Bem.:

- Aus der uns bekannten Schreibweise für $a \circ b(x) = a(b(x))$ folgt:
  $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f(x)^{-1} =$

- Die Verknüpfung der Inversen mit der ursprünglichen Funktion ist somit eine sog. *identische Abbildung*. D.h., dass das Argument dieser Verknüpfung auf sich selber abgebildet wird, oder anders ausgedrückt, dass der Funktionswert immer gleich dem Argument ist:

$$
\begin{aligned}
a^{-1} \circ a(2) \ &= \ a \circ a^{-1}(2)) \ = \ 2 \\
b^{-1} \circ b(\pi) &= b \circ b^{-1}(\pi)) = \ \ldots \\
c^{-1} \circ c(0) &= c \circ c^{-1}(0) = \ \ldots \\
d^{-1} \circ d(x) &= d \circ d^{-1}(x)) = \ \ldots
\end{aligned}
$$

  Dass gilt natürlich immer nur genau dann wenn $\ldots$

- Die Definition gilt nur, wenn die Inverse auch existiert!
  Die Existenz der Inversen werden wir an späteren Beispielen noch ausführlich diskutieren.

- Warum wird in der Definition der Inversen die folgende Gleichung gefordert:

$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x)$$

Wir wollen uns zum Abschluss der Einführung der mathematischen Grundlagen noch einige uns schon bekannte Umkehrfunktionen betrachten:
(Beachte: Wir werden auch in den folgenden Beispielen den Definitionsbereich der Inversen *noch nicht* berücksichtigen. Diesen wichtigen Aspekt werden wir in den geometrischen Betrachtungen im Koordinatensystem noch gemeinsam diskutieren!)

Funktion	**Umkehrfunktion**	Begründung
$\sin x$	$\sin^{-1} x$	denn z.B. gilt: $\sin 45^0 = \sqrt{2}/2$
		$\sin^{-1}(\sqrt{2}/2) = 45^0$
$\cos x$	$\cos^{-1} x$	denn z.B. gilt: $\cos(\pi/3) = \ldots$
		$\cos^{-1}(\ldots) = \pi/3$
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	denn z.B. gilt: $f(1.2) = \ldots$
		$f^{-1}(\ldots\ldots) = \ldots$
$\ln x$	e^x	denn z.B. gilt: $e^{\ln 7} = \ldots$
		$\ln \ldots = 7$
		hier gilt sogar allg.: $e^{\ln x} = x$
e^x	$\ln x$	denn allg. gilt: $\ln(e^x) = x$
a^x	$\ldots$	denn allg. gilt: $\log_a a^x = x$
$\log_a x$	$\ldots$	denn allg. gilt:

2.2 Geometrisch betrachtet

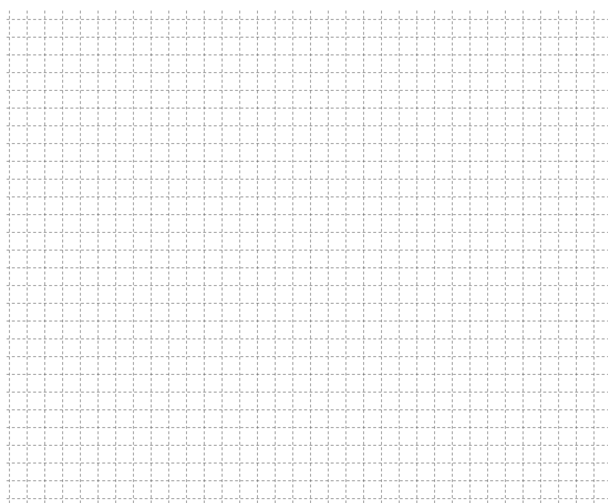
Zur Anschauung verwenden wir die folgende affine Funktion

$$f(x) = 0.5x + 5$$

und wollen zuerst eine zugehörige Wertetabelle erstellen:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$								

Übertragt eure Werte in das folgende Koordinatensystem:



Tragt weiter in das gleiche Koordinatensystem den Graphen der Geraden $y = x$ ein und den Graphen der Inversen $f^{-1}(x)$.
Verwendet für die Inverse die obige Wertetabelle und die Eigenschaft, dass f^{-1} jedem Funktionswert von f das ursprünglich Argument zuordnet (d.h. die obige Tabelle ist *umgekehrt* zu lesen).

Geometrisch betrachtet könnt ihr aus dem Vergleich von $graph(f)$ mit $graph(f^{-1})$ folgendes feststellen: ...

Insbesondere auch, dass die Inverse einer affinen Funktion wieder eine affine Funktion ist und deren Funktionsgleichung ihr bestimmt könnt und jetzt auch müsst: ...

Aufgaben 2 *Wir betrachten die folgenden Funktionen:*

- *für Gruppe I:* $a(x) = 2x - 3$, $b(x) = -0.25x + 2$
- *für Gruppe II:* $b(x) = -0.25x + 2$, $c(x) = -x + 3$
- *für Gruppe III:* $c(x) = -x + 3$, $d(x) = x - 2$
- *für Gruppe IV:* $d(x) = x - 2$, $e(x) = -2$
- *für Gruppe V:* $e(x) = -2$, $a(x) = 2x - 3$

Jede Gruppe hat ihre Funktionen wie folgt zu bearbeiten:

1. *Das Erstellen einer Wertetabelle,*
2. *Die Darstellung des Graphen und der zugehörigen Inversen,*
3. *Bestimmen der Funktionsgleichung der zugehörigen Inversen.*

und jedes Gruppenmitglied muss die Aufgabe und die Lösungen soweit verstehen, dass er/sie als ExpertIn für eure Funktion betrachtet werden kann.

3 Unterrichtsrunde - *für affine Funktionen*

Für diese *Unterrichtsrunde* werden die Gruppen entsprechend der Einteilung für Runde 3 in der Einleitung neu zusammengesetzt.

Ihr habt nun 15 Minuten Zeit, eure **Aufgabe 2** aus der letzte Runde zu besprechen. Wählt dazu aus euren Mitgliedern ein/e ExpertIn aus, welche/r die Aufgabe und die Lösungen mit der Herleitung präsentiert.

Mein Bemerkungen, Ergänzungen, Überlegungen zur Aufgabe 2: ...

Aufgaben 3 *Als Vorbereitung für die nächste Runde verwenden wir die folgende Funktion:*

$$h(x) = (x - 2) \cdot e^{0.25x}$$

- *Erstellt in der Gruppe einer Wertetabelle über folgendem Bereich: -24, - 22, -20, . . . 0, 2, 4.*
- *Stellt die Funktion graphisch dar.*
  Mit *geogebra* lautet die Eingabe:

  $$h(x) = (x - 2) * exp(0.25x) \qquad)$$

- *Konstruiere die "Inverse" - Was fällt auf ?*
- *Bringt eure Skizze in den Unterricht.*

4 Klassenrunde - *für allgemeine Betrachtungen*

In dieser Runde wollen wir mit der gesamten Klasse

- die Probleme bei der Inversen $h^{-1}(x)$ besprechen,
- Lösungen der Probleme diskutieren,
- *GeoGebra* für die Konstruktion der "Inversen" einsetzen.

Als Diskussionsgrundlage verwenden wir dazu **Aufgabe 3**:

Mein Bemerkungen, Ergänzungen, Überlegungen zur Diskussion: . . .

Entsprechend der Einteilung für Runde 4 in der Einleitung könnt ihr jetzt die folgende Aufgabe lösen:

Aufgaben 4 *Wir betrachten die folgende Funktion:*

$$f(x) = 2(1 - 3x) \cdot e^{-2.5x}$$

Skizziert den Graphen und die zugehörige "Umkehrfunktion" mit der Angabe der Definitions- und Wertebereiche.

Als Abschluss dieser Klassenrunde und Vorbeitung für die nächste Expertenrunde werden wir jetzt gemeinsam die folgende Funktion invertieren, mit vollständiger Diskussion:

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

5 Expertenrunde - *für spezielle Funktionstypen*

Wir setzen wieder die Gruppen entsprechend der Einteilung für Runde 5 in der Einleitung zusammen und beginnen mit der Besprechung der **Aufgabe 4** aus der letzten Runde.
Vergleicht eure Resultate und diskutiert Unklarheiten. Ihr habt dazu 10 Minuten Zeit.

Mein Bemerkungen, Ergänzungen, Überlegungen zur Aufgabe 4: . . .

In dieser Runde sollt ihr einen speziellen Funktionstyp und die zugehörige Inverse unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches diskutieren.

Den Gruppen stehen die folgenden uns schon bekannten Funktionstypen zur Verfügung:

- Gruppe I: Quadratische Funktion & Potenzfunktion mit geradem positven Exponenten,
- Gruppe II: Potenzfunktion mit geradem positven Exponenten & Potenzfunktion mit ungeradem negativen Exponenten,
- Gruppe III: Potenzfunktion mit ungeradem negativen Exponenten & Potenzfunktion mit geraden negativen Exponenten,
- Gruppe IV: Potenzfunktion mit geraden negativen Exponenten & Potenzfunktion mit ungeraden poeitiven Exponenten,
- Gruppe V: Potenzfunktion mit ungeraden positiven Exponenten & quadratische Funktionen.

Aufgaben 5 *Gebt euch ein eigenes Beispiel zu euren Funktionstypen vor, diskutiert vollständig die Invertierbarkeit und erstellt eine Musterlösung.*

6 Unterrichtsrunde - *für spezielle Funktionstypen*

In dieser letzten Unterrichtsrunde werden die Mitglieder ein weiteres Mal entsprechend der Einteilung für Runde 6 in der Einleitung neu zusammengestellt und die jeweiligen ExpertInnen für den speziellen Funktionstyp müssen ihre **Aufgabe 5** präsentieren. Ihr habt dafür 5 x 5 Minuten Zeit.

Mein Bemerkungen, Ergänzungen, Überlegungen zur Aufgabe 5: . . .

7 Schlussrunde

Folgende Aufgabe sollt ihr als Hausaufgabe lösen:
(Es wird keine Musterlösung oder offizielle Besprechung der Lösung geben. Organisiert euch selbst!)

Aufgaben 6 *Wir betrachten die folgende Funktion:*

$$f(x) = x^2 + x$$

- *Skizziere den Graphen von f,*
- *Konstruiere den Verlauf der zugehörigen "Umkehrfunktion",*
- *Bestimme die Funktionsgleichung von f^{-1} mit Angabe der Definitions- und Wertebereiche.*

Mein Bemerkungen, Ergänzungen, Überlegungen zur Aufgabe 6: ...

Weiter gehts mit der Aufgabenserie

Analysis-Aufgaben: *Potenz- & Exponetialfunktionen 3*

und im Skript mit dem Kapitel

4.5 Wachstums- & Zerfallsprozesse