

In den Potenzreihenentwicklungen (VI-68) und (VI-70) verschwinden dann bis auf den 1. Summand *alle* Summanden und wir erhalten die aus der Schulphysik bekannten Fallgesetze:

$$v = g t \quad \text{und} \quad s = \frac{1}{2} g t^2 \quad (t \geq 0) \quad (\text{VI-73})$$

Sie gelten wegen $t < \frac{\pi v_E}{2g} \rightarrow \infty$ für $v_E \rightarrow \infty$ für *alle* Zeiten, d. h. für $t \geq 0$.

Übungsaufgaben

Zu Abschnitt 1

1) Berechnen Sie den *Summenwert* der folgenden geometrischen Reihen:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} 0,3^{n-1} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

2) Welchem allgemeinen *Bildungsgesetz* unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des *Quotientenkriteriums* auf *Konvergenz* bzw. *Divergenz*:

$$\text{a) } 1 + \frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \dots \quad \text{b) } \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots \quad \text{d) } \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots$$

3) Zeigen Sie die *Konvergenz* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Welchen *Summenwert* hat die Reihe?

Hinweis: Das allgemeine Glied zunächst durch Partialbruchzerlegung in Teilbrüche zerlegen, dann die Partialsumme s_n bestimmen.

4) Bestimmen Sie das *Konvergenzverhalten* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{n} + 1\right)$.

Hinweis: Zunächst das allgemeine Reihenglied umformen (Rechenregeln für Logarithmen anwenden), dann die Partialsumme s_n bestimmen.

5) Zeigen Sie: Die folgenden Reihen erfüllen *nicht* das (bekannte) notwendige Konvergenzkriterium und sind somit divergent.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(3 + \frac{1}{2n}\right)$$

- 6) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{10001} + \dots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

c) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) $\frac{2^1}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + - \dots$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$

- 7) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{n}{(n+1)^n} + \dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n \cdot n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

- 8) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten *konvergenten* Vergleichsreihe (*Majorante*) die *Konvergenz* der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 0,5^n \cdot \cos(2n)$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+3)^2}$

- 9) Zeigen Sie mit Hilfe des *Minorantenkriteriums*, dass die folgenden Reihen *divergieren*:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ (mit $\alpha \leq 1$) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

- 10) Welche der folgenden *alternierenden* Reihen *konvergieren*, welche *divergieren*? Verwenden Sie bei der Untersuchung das Konvergenzkriterium von *Leibniz*.

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \dots$ b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 5^{2n-1}}$

Zu Abschnitt 2

- 1) Bestimmen Sie den *Konvergenzradius* und *Konvergenzbereich* der folgenden Potenzreihen:

$$\text{a) } P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \quad \text{b) } P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$\text{c) } P(x) = \frac{x^1}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots \quad \text{d) } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

$$\text{e) } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{f) } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

- 2) Berechnen Sie den *Konvergenzradius* und *Konvergenzbereich* der Potenzreihe

$$P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \dots$$

Anleitung: Setzen Sie zunächst $z = x^2$ und untersuchen Sie anschließend das Konvergenzverhalten der neuen (z -abhängigen) Reihe.

Zu Abschnitt 3

- 1) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine *Mac Laurinsche Reihe*:

$$\text{a) } f(x) = \sinh x \quad \text{b) } f(x) = \arctan x \quad \text{c) } f(x) = \ln(1 + x^2)$$

- 2) Bestimmen Sie die *Mac Laurinsche Reihe* der Funktion $f(x) = \cosh x$:

- a) auf *direktem* Wege nach Formel (VI-44),
 b) aus den *Potenzreihenentwicklungen* von e^x und e^{-x} unter Berücksichtigung der Definitionsformel $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

- 3) Entwickeln Sie die Wurzelfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ unter Verwendung der Binomischen Reihe in ein *Mac Laurinsches Polynom* (Abbruch nach dem 3. Glied). Berechnen Sie anschließend mit dieser Näherungsfunktion den Funktionswert an der Stelle $x = 0,2$ und schätzen Sie den Fehler ab.

- 4) Bestimmen Sie die *Mac Laurinschen Reihen* der folgenden Funktionen, indem Sie die Potenzreihen der beiden Faktoren *gliedweise* multiplizieren. In welchem Bereich konvergieren die Reihen?

a) $f(x) = e^{-2x} \cdot \cos x$ b) $f(x) = \sin^2 x$ c) $f(x) = \frac{\sinh x}{1 + x^2}$

- 5) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um die Stelle x_0 in eine *Taylor-Reihe*:

a) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}, \quad x_0 = 1$

- 6) Die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$ soll in der Umgebung des Nullpunktes durch einfache Polynomfunktionen bis *maximal* 3. Grades angenähert werden. Bestimmen Sie diese Näherungsfunktionen mit Hilfe der *Mac Laurinschen* Reihenentwicklung und skizzieren Sie ihren Verlauf.

- 7) Berechnen Sie den Funktionswert von $f(x) = \sqrt{1-x}$ an der Stelle $x = 0,05$ auf sechs Dezimalstellen nach dem Komma genau.

- 8) Berechnen Sie $\cos 8^\circ$ mit Hilfe der *Mac Laurinschen* Reihenentwicklung von $\cos x$ auf vier Dezimalstellen genau.

Hinweis: Winkel erst ins *Bogenmaß* umrechnen!

- 9) Ersetzen Sie die Sinusfunktion in der Umgebung ihres 1. Maximums im *positiven* x -Bereich durch eine *Parabel*.

Anleitung: Taylor-Reihe von $f(x) = \sin x$ um die betreffende Stelle bestimmen und nach dem quadratischen Glied abbrechen.

- 10) Lösen Sie die Gleichung $\cosh x = 4 - x^2$ *näherungsweise* durch Potenzreihenentwicklung von $\cosh x$ und Abbruch dieser Reihe nach der 4. Potenz.

- 11) Lösen Sie das (unbestimmte) Integral $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, indem Sie den Integranden zunächst in eine *Mac Laurinsche Reihe* entwickeln (Binomische Reihe verwenden!) und diese anschließend *gliedweise* integrieren. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der durch Integration gewonnenen Potenzreihe, die eine Ihnen bekannte elementare Funktion darstellt. Um welche Funktion handelt es sich?

- 12) Die folgenden bestimmten Integrale sind elementar, d. h. in geschlossener Form *nicht* lösbar. Sie lassen sich jedoch durch *Potenzreihenentwicklung* des Integranden und anschließender *gliedweiser Integration* berechnen. Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale auf *vier* Dezimalstellen nach dem Komma genau.

a) $\int_0^{0,5} \cos(\sqrt{x}) dx$ b) $\int_0^{0,2} \frac{e^x}{x+1} dx$ c) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

- 13) Zeigen Sie, wie man aus der als *bekannt* vorausgesetzten Potenzreihe von $\ln(1-x)$ durch *Differentiation* die Mac Laurinsche Reihe von $\frac{1}{1-x}$ gewinnen kann.

Anleitung: Gehen Sie von der folgenden Entwicklung aus:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (-1 \leq x < 1)$$

- 14) Zwischen Luftdruck p und Höhe h (gemessen gegenüber dem Meeresniveau) besteht unter der Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang (sog. *barometrische Höhenformel*):

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991\text{m}}} \quad (h \geq 0\text{ m})$$

Leiten Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung einen *linearen* Zusammenhang zwischen den Größen p und h her. Bis zu welcher Höhe h_{\max} liefert diese Näherung Werte, die um *maximal* 1% vom tatsächlichen Luftdruck abweichen?

- 15) Die Schwingungsdauer T eines *konischen Pendels* (Bild VI-15) hängt bei gegebener Fadenlänge l und festem Ort nur noch vom Winkel φ zwischen Faden und Vertikale ab:

$$T = T(\varphi) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \cos \varphi}$$

(g : Erdbeschleunigung).

Zeigen Sie:

Für *kleine* Winkel φ ist die Schwingungsdauer T nahezu *winkelunabhängig*.

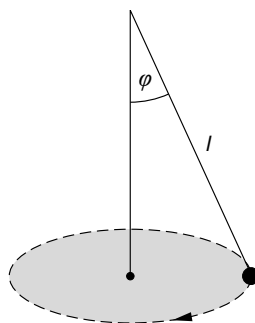


Bild VI-15 Konisches Pendel

- 16) Die Schwingungsdauer T einer ungedämpften *elektromagnetischen Schwingung* lässt sich nach der Beziehung $T = 2\pi \cdot \sqrt{LC}$ aus der Induktivität L und der Kapazität C berechnen (Bild VI-16).

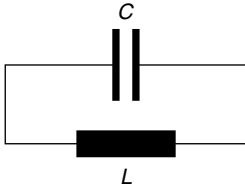


Bild VI-16
Elektromagnetischer Schwingkreis

- a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer für die Werte $L_0 = 0,1 \text{ H}$ und $C_0 = 10 \mu\text{F}$.
- b) Bei einer Kapazitätsänderung um ΔC ändert sich die Schwingungsdauer um ΔT (die Induktivität bleibe *konstant*). Leiten Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung einen *linearen* Zusammenhang zwischen diesen Größen her.
- c) Berechnen Sie mit dieser *linearen Näherungsformel* die Änderung ΔT der Schwingungsdauer für den Fall einer *Kapazitätszunahme* um $\Delta C = 0,6 \mu\text{F}$ und vergleichen Sie diesen Wert mit dem *exakten* Wert.
- 17) In der Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die Elektronenmasse m mit der Elektronengeschwindigkeit v nach der Formel

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

zunimmt (m_0 : Ruhemasse des Elektrons; c : Lichtgeschwindigkeit). Zeigen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung, dass zwischen den Größen m und v in *1. Näherung* der folgende Zusammenhang besteht:

$$m \approx m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

- 18) Die folgenden Grenzwerte führen zunächst auf einen *unbestimmten Ausdruck* vom Typ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$. Berechnen Sie diese Grenzwerte unter Anwendung der Regel von *Bernoulli* und *de L'Hospital*:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x}{1 - e^x}$ e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cdot \tan x}{\sin(2x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2}{e^{2x}}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

19) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} \cdot \sqrt{x})$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$

Anleitung: Die Grenzwerte sind von einem Typ, auf den die Regel von Bernoulli und de L'Hospital zunächst *nicht* anwendbar ist. Mit Hilfe *elementarer* Umformungen gelingt es jedoch, die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ herzustellen, auf die man dann die Grenzwertregel anwenden darf.

20) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe einer geeigneten Potenzreihenentwicklung:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)}{e^x - 1 + \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

21) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - e^x)$$

vom Typ $\infty - \infty$ durch Ausklammern der Exponentialfunktion und Verwendung der Grenzwertregel von *Bernoulli-de L'Hospital*.