36) Nach Bild A-67 ist:

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^4 dx = $$

$$= \frac{1}{10}\pi\varrho R^4 H = \frac{3}{10} m R^2$$

$$\left(\text{Kegelmasse: } m = \varrho V = \frac{1}{3}\pi\varrho R^2 H\right)$$

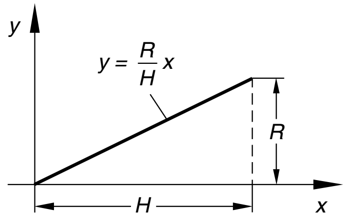

Bild A-67

37) Nach Beispiel 1 aus Abschnitt 10.9.1 ist $J_S = \frac{1}{2} m R^2$.

Aus dem *Steinerschen Satz* folgt dann (siehe Bild A-68):

$$J_M = J_S + m R^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

M: Mantellinie
S: Schwerpunktachse (Symmetrieachse)
R: Radius

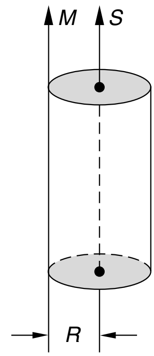

Bild A-68

VI Potenzreihenentwicklungen

Abschnitt 1

1) a) $q = -\frac{1}{8}, \quad s = \frac{8}{9}$ b) $q = 0{,}3, \quad s = \frac{10}{7}$ c) $q = -\frac{2}{3}, \quad s = 4 \cdot \frac{3}{5} = 2{,}4$

2) a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{4(2n+3)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2+1/n}{4(2+3/n)} = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0 < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

3) *Ansatz:*

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + B(n+1)}{(n+1)(n+2)} \quad \Rightarrow \quad A = 1, \qquad B = -1$$

Somit: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

Partialsummen:

$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \qquad s_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4};$$

$$s_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}; \qquad \ldots; \qquad s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

(die inneren Summanden heben sich jeweils paarweise auf).

Grenzwert (*Summenwert*): $\displaystyle\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$

Die unendliche Reihe ist *konvergent* und hat den Summenwert $s = 1/2$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1+n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(1+n) - \ln n]$

Partialsummen:

$$s_1 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} = \ln 2; \qquad s_2 = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) = \ln 3;$$

$$s_3 = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) = \ln 4; \qquad \ldots; \qquad s_n = \ln(n+1)$$

Grenzwert der Partialsummenfolge:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = \infty$$

Der Grenzwert ist *nicht* vorhanden, die Reihe daher (bestimmt) *divergent*.

5) Wir zeigen, dass die Reihen die für die Konvergenz notwendige Bedingung $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ *nicht* erfüllen und somit *divergent* sind.

a) $\displaystyle a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$$

(der Grenzwert im Nenner ist definitionsgemäß die *Eulersche* Zahl e).

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \ln \left(3 + \frac{1}{2n}\right) = \ln 3 > 0$

6) a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 10^{-n}}{10 + 10^{-n}} = \frac{1}{10} < 1 \quad \Rightarrow$

Reihe *konvergiert*

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 1/n}{2} = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow$

Reihe *konvergiert*

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot 2^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{1 + 1/n} = 2 > 1 \quad \Rightarrow$

Reihe *divergiert*

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^{2n+2} \cdot (2n)!}{(2n+2)!\, 3^{2n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^{2n} \cdot 3^2 \cdot (2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2) \cdot 3^{2n}} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{9}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

7) a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)^n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} = 0 < 1$

(der Zähler strebt gegen 1, der Nenner gegen ∞). Die Reihe ist somit *konvergent*.

b) $a_n = \frac{5^n}{4^n \cdot n^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1{,}25^n}{n^2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1{,}25^n}{n^2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1{,}25}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1{,}25}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1{,}25}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} =$

$= \frac{1{,}25}{\left(\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}\right)} = 1{,}25 > 1$

(unter Berücksichtigung von $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Die Reihe ist somit *divergent*.

c) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

(der Grenzwert im Nenner ist die *Eulersche Zahl* e). Die Reihe ist somit *konvergent*.

8) a) $|a_n| = |0{,}5^n \cdot \cos(2n)| = 0{,}5^n \cdot \underbrace{|\cos(2n)|}_{\leq 1} \leq 0{,}5^n$

Die Reihenglieder sind (betragsmäßig) nicht größer als die entsprechenden Glieder der *konvergenten geometrischen* Reihe mit $q = 0{,}5$ (*Majorante*). Die Reihe ist somit *konvergent*.

b) $a_n = \frac{2}{(n+3)^2} < \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$ (für $n \geq 1$)

Die konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ist somit eine *Majorante* der vorgegebenen Reihe, dieser daher *konvergent*.

9) a) Es ist $n^{\alpha} \leq n$ für $\alpha \leq 1$. Daraus folgt:

$$a_n = n^{-\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$$

Die Reihenglieder sind also nicht kleiner als die entsprechenden Glieder der *divergenten harmonischen Reihe* (*Minorante*), d. h. die vorliegende Reihe ist *divergent.*

b) Wegen $n + 1 > \ln(n+1)$ für alle $n \geq 1$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

Die Reihenglieder sind größer als die entsprechenden Glieder der *divergenten harmonischen Reihe*, die somit eine *Minorante* der vorgegebenen Reihe ist. Die Reihe ist daher *divergent*:

10) a) $\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \ldots$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n!} = 0$ $\Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

b) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ $\Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

c) $\frac{1}{1} > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

d) $\frac{1}{5} > \frac{1}{2 \cdot 5^3} > \frac{1}{3 \cdot 5^5} > \ldots$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n \cdot 5^{2n-1}} = 0 \quad \Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

Abschnitt 2

1) a) $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1$

Die Reihe *divergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| < 1$

b) $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

Die Reihe *divergiert* für $x = -1$ (harmonische Reihe) und *konvergiert* für $x = 1$ (alternierende harmonische Reihe). *Konvergenzbereich:* $-1 < x \le 1$

c) $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1$

Die Reihe *konvergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| \le 1$

d) $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim\limits_{n \to \infty} 2 = 2$

Die Reihe *divergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| < 2$

e) $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$

Die Reihe *divergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| < 1$

f) $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{n!(n+2)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)\,n!\,(n+1)}{n!(n+2)} =$

$$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)}{1 + \frac{2}{n}} = \infty$$

Die Reihe *konvergiert beständig*, d. h. für jedes $x \in \mathbb{R}$.

2) $r = 1$. *Konvergenzbereich:* $|x| < 1$

Abschnitt 3

1) a) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; *Konvergenzbereich:* $|x| < \infty$

b) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; *Konvergenzbereich:* $|x| \le 1$

c) $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n}}{n}$

Konvergenzbereich: $|x| \le 1$

2) a) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; *Konvergenzbereich:* $|x| < \infty$

b) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = (1-x^3)^{-1/2} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6}_{\text{Näherungsfunktion}} + \underbrace{\frac{5}{16}x^9}_{\text{Fehler}} + \ldots$

$f(0{,}2) \approx 1 + \frac{1}{2}(0{,}2)^3 + \frac{3}{8}(0{,}2)^6 = 1{,}004\,024$ (auf 6 Dezimalstellen genau)

Fehler: $\approx \frac{5}{16}(0{,}2)^9 = 0{,}16 \cdot 10^{-6}$

4) a) $f(x) = e^{-2x} \cdot \cos x = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \ldots$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

b) $f(x) = \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - + \ldots$; *Konvergenzbereich:* $|x| < \infty$

c) Der Faktor $(1+x^2)^{-1}$ wird nach der *Binomischen Formel* entwickelt (Substitution $x \to x^2, n = -1$):

$$f(x) = \frac{\sinh x}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \cdot \sinh x = x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{101}{120}x^5 - + \ldots$$

Konvergenzbereich: $|x| < 1$

5) a) $f(x) = \cos x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^1 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

b) $f(x) = \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^1 - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \ldots$

Konvergenzbereich: $0 \le x \le 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = -1 + 1(x-1)^2 - 2(x-1)^3 + 3(x-1)^4 - + \ldots$

Konvergenzbereich: $0 < x < 2$

6) $f(x) = x \cdot e^{-x} = x\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - + \ldots\right) = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - + \ldots$

Näherungsfunktionen (Bild A-69):

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x - x^2$

$f_3(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3$

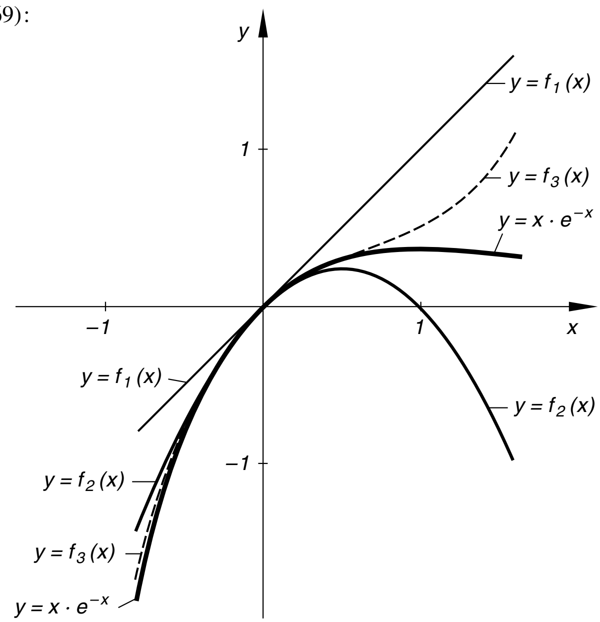

Bild A-69

7) $f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$ wird nach der *Binomischen Formel* entwickelt $(n = 1/2)$:

$\sqrt{1 - 0{,}05} = (1 - 0{,}05)^{1/2} =$

$= 1 - \frac{1}{2}(0{,}05) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}(0{,}05)^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}(0{,}05)^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}(0{,}05)^4 - \ldots =$

$= 1 - 0{,}025 - 0{,}000\,312\,5 - 0{,}000\,007\,81 - \underbrace{0{,}000\,000\,24}_{< 0{,}5 \cdot 10^{-6}} - \ldots$

Abbruch der Reihe nach dem *4. Glied:* $\sqrt{1 - 0{,}05} \approx 0{,}974\,679$ (auf 6 Dezimalstellen nach dem Komma genau)

8) $8^\circ \mathrel{\widehat{=}} 0{,}139\,626$

$$\cos 8^\circ = \cos 0{,}139\,626 = 1 - \frac{1}{2!}\,(0{,}139\,626)^2 + \frac{1}{4!}\,(0{,}139\,626)^4 - + \ldots =$$

$$= 1 - 0{,}009\,784 + \underbrace{0{,}000\,016}_{< \, 0{,}5 \, \cdot \, 10^{-4}} - + \ldots$$

Abbruch nach dem 2. *Glied:* $\cos 8^\circ \approx 0{,}9902$ (auf 4 Dezimalstellen genau)

9) $$\sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - + \ldots$$

Näherungsparabel: $\sin x \approx 1 - \dfrac{1}{2!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{\pi}{2}\,x + 1 - \dfrac{\pi^2}{8}$

10) Man erhält die *bi-quadratische* Gleichung

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 4 - x^2 \qquad \text{oder} \qquad x^4 + 36\,x^2 - 72 = 0$$

mit den reellen Lösungen $x_{1/2} = \pm\,1{,}378$.

11) $$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\,dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + - \ldots)\,dt =$$

$$= \left[t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{5}\,t^5 - \frac{1}{7}\,t^7 + - \ldots\right]_0^x = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{7}\,x^7 + - \ldots$$

Wegen

$$\int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_0^x = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x - 0 = \arctan x$$

handelt es sich um die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = \arctan x$. Sie *konvergiert* für $|x| \le 1$.

12) a) In der Mac Laurinschen Reihe von $\cos z$ wird $z = \sqrt{x}$ gesetzt und anschließend *gliedweise* integriert:

$$\int_0^{0,5} \cos(\sqrt{x})\,dx = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + - \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \frac{x^4}{4 \cdot 6!} + - \ldots\right]_0^{0,5} =$$

$$= 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2 \cdot 2!} + \frac{0{,}5^3}{3 \cdot 4!} - \frac{0{,}5^4}{4 \cdot 6!} + - \ldots =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}0625 + 0{,}001\,736 - \underbrace{0{,}000\,021}_{< \, 0{,}5 \, \cdot \, 10^{-4}} + - \ldots$$

Durch Abbruch der Reihe nach dem *3. Glied* folgt:

$$\int_{0}^{0{,}5} \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = 0{,}4392 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau)}$$

b) Die Mac Laurinschen Reihen von e^x und $\frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} = (1+x)^{-1}$ werden *gliedweise* ausmultipliziert, anschließend wird integriert:

$$\int_{0}^{0{,}2} \frac{e^x}{x+1}\, dx = \int_{0}^{0{,}2} e^x \cdot (1+x)^{-1}\, dx = \int_{0}^{0{,}2} \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{24}x^4 + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{9}{120}x^5 + \ldots\right]_0^{0{,}2} =$$

$$= 0{,}2 + \frac{1}{6}(0{,}2)^3 - \frac{1}{12}(0{,}2)^4 + \frac{9}{120}(0{,}2)^5 + \ldots =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}001\,333 - 0{,}000\,133 + \underbrace{0{,}000\,024}_{< 0{,}5 \cdot 10^{-4}} + \ldots$$

Durch Abbruch nach dem *3. Glied* folgt:

$$\int_{0}^{0{,}2} \frac{e^x}{x+1}\, dx = 0{,}2012 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau)}$$

c) Die Mac Laurinsche Reihe von $\sin x$ wird zunächst *gliedweise* durch x dividiert und anschließend integriert.

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{0}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + - \ldots\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + - \ldots =$$

$$= 1 - 0{,}055\,555 + 0{,}001\,666 - \underbrace{0{,}000\,028}_{< 0{,}5 \cdot 10^{-4}} + - \ldots$$

Durch Abbruch der Reihe nach dem *3. Glied* folgt:

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx = 0{,}9461 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau)}$$

13) Es ist

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{d}{dx}\left[\ln(1-x)\right] = -\frac{d}{dx}\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right) =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (\textit{konvergent} \text{ für } |x| < 1).$$

14) $$p(h) = p_0\left(1 - \frac{h}{7991\,\text{m}} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{7991\,\text{m}}\right)^2 + \ldots\right)$$

Lineare Näherung: $p(h) = p_0\left(1 - \frac{h}{7991\,\text{m}}\right)$

Der (absolute) Fehler Δp liegt in der *Größenordnung* des vernachlässigten *quadratischen* Gliedes, für den relativen Fehler gilt dann (mit p in der *linearen* Näherung):

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{7991\,\text{m}}\right)^2}{1 - \frac{h}{7991\,\text{m}}} \le 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad h \le 1053\,\text{m}, \quad \text{d. h.} \quad h_{\max} = 1053\,\text{m}$$

Eine *bessere* Abschätzung für den relativen Fehler erhält man, wenn man für den Druck p die exakte *Exponentialformel* verwendet. Dies führt allerdings zu einer transzendenten Gleichung (bzw. Ungleichung), die sich jedoch mit dem *Tangentenverfahren von Newton* leicht lösen lässt. Ergebnis:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{7991\,\text{m}}\right)^2}{e^{-\frac{h}{7991\,\text{m}}}} \le 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad h = 1058\,m, \quad \text{d. h.} \quad h_{\max} = 1058\,\text{m}$$

15) $\cos\varphi$ wird in eine Mac Laurinsche Reihe entwickelt, Abbruch nach dem *konstanten* Glied:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\cos\varphi} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 \underbrace{- \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \ldots}_{\substack{\text{vernachlässigbar} \\ \text{in 0. Näherung!}}}\right)} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Schwingungsdauer entspricht jetzt der Schwingungsdauer eines *Fadenpendels* ($\varphi = 0$)!

16) a) $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0 C_0} = 6{,}283 \cdot 10^{-3}\,\text{s} = 6{,}283\,\text{ms}$

b) $T(C) = 2\pi\sqrt{L_0 C} = 2\pi\sqrt{L_0}\cdot\sqrt{C}$

Die Funktion $f(C) = \sqrt{C}$ wird um die Stelle C_0 in eine *Taylor-Reihe* entwickelt:

$$f(C) = \sqrt{C} = \sqrt{C_0} + \frac{1}{2\sqrt{C_0}}(C - C_0) + \ldots$$

$$T(C) = 2\pi\sqrt{L_0} \cdot f(C) = 2\pi\sqrt{L_0} \cdot \sqrt{C} =$$
$$= 2\pi\sqrt{L_0}\left(\sqrt{C_0} + \frac{1}{2\sqrt{C_0}}(C - C_0) + \ldots\right) =$$
$$= \underbrace{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}_{T_0} + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}(C - C_0) + \ldots = T_0 + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}(C - C_0) + \ldots$$

Lineare Näherung (*linearisierte* Funktion):

$$T - T_0 = \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}(C - C_0) \qquad \text{oder} \qquad \Delta T = \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,\Delta C$$

(mit $\Delta T = T - T_0$ und $\Delta C = C - C_0$)

c) $\Delta T = 1{,}89 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}189\,\text{ms}$, $\Delta T_{\text{exakt}} = 1{,}86 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}186\,\text{ms}$

17) Mit $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ erhält man aus der *Binomischen Formel* (für $n = -1/2$):

$$m = m_0\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} = m_0(1 - x)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}x + \ldots\right) =$$
$$= m_0\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots\right) \approx m_0\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

18) a) 1 b) 0 c) 1 d) -1 e) $n \cdot a^{n-1}$

f) 0 g) $\frac{3}{2}$ h) 1 i) 0

j) Nach *dreimaliger* Anwendung der Bernoulli-de L'Hospitalschen Regel folgt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 2}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{4 \cdot e^{2x}} = 0$$

k) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cosh^2(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cosh^2(\sqrt{x})} = 1$$

19) a) Typ 0^0; $(2x)^x = e^{\ln(2x)^x} = e^{x \cdot \ln(2x)}$

Der Grenzwert wird im *Exponenten* gebildet:

$$\lim_{x\to 0}[x \cdot \ln(2x)] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x)}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2x} \cdot 2}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Somit: $\lim\limits_{x \to 0} (2x)^x = e^{\left(\lim\limits_{x \to 0} [x \cdot \ln(2x)]\right)} = e^0 = 1$

b) Typ ∞^0; $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{x(\ln 1 - \ln x)} = e^{x(0 - \ln x)} = e^{-x \cdot \ln x}$

Weiterer Lösungsweg wie in a):

$\lim\limits_{x \to 0} (-x \cdot \ln x) = 0; \qquad \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\left(\lim\limits_{x \to 0} (-x \cdot \ln x)\right)} = e^0 = 1$

c) Typ $0 \cdot (-\infty)$

$$\lim_{x \to 0} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

d) Typ $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to \infty} (e^{-x} \cdot \sqrt{x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot e^x} = 0$$

e) Typ $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to \pi} (x - \pi) \cdot \tan(x/2) = \lim_{x \to \pi} \frac{\tan(x/2)}{\dfrac{1}{x - \pi}} = \lim_{x \to \pi} \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x/2)} \cdot \dfrac{1}{2}}{-\dfrac{1}{(x - \pi)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{(x - \pi)^2}{-2 \cdot \cos^2(x/2)} = \lim_{x \to \pi} \frac{2(x - \pi)}{-2 \cdot 2 \cdot \cos(x/2) \cdot (-\sin(x/2)) \cdot \dfrac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\underbrace{\cos(x/2) \cdot \sin(x/2)}_{(1/2) \cdot \sin x}} = 2 \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\sin x} = 2 \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{1}{\cos x} = 2 \cdot (-1) = -2$$

(nach 3-*maliger* Anwendung der Grenzwertregel von Bernoulli-de L'Hospital)

f) Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x \cdot \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{1 \cdot \tan x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\tan x \cdot \cos^2 x + x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cdot \cos x + x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} = \frac{0}{1 - 0 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

(nach 2-*maliger* Anwendung der Grenzwertregel von Bernoulli-de L'Hospital und Beachtung von $\tan x = \sin x / \cos x$).

20) a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + - \ldots}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + - \ldots\right) = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{2(x - \sin x)}{e^x - 1 + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left[x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots\right)\right]}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - + \ldots\right)}{2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - + \ldots\right)}{2 + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots} = 0$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} + \ldots\right) = 0$$

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right]^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right)\right]^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right)^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right)^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

21) $\lim\limits_{x \to \infty} (x - e^x) = \lim\limits_{x \to \infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) = \lim\limits_{x \to \infty} e^x \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) =$

$$= \underbrace{\lim_{x \to \infty} e^x}_{\infty} \cdot \left(\underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}}_{0} - \underbrace{\lim_{x \to \infty} 1}_{1} \right) = \infty (0 - 1) = -\infty$$

Berechnung des zweiten Grenzwertes nach der Regel von *Bernoulli-de L'Hospital* $\left(\text{Typ } \frac{\infty}{\infty} \right)$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

VII Komplexe Zahlen und Funktionen

Abschnitt 1

1) Siehe Bild A-70

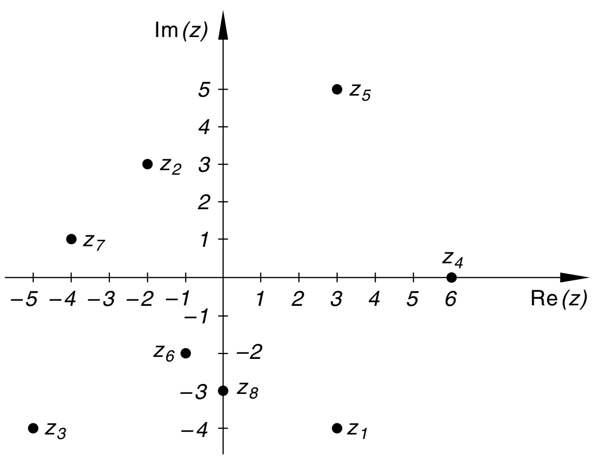

Bild A-70