VI Potenzreihenentwicklungen

1 Unendliche Reihen

1.1 Ein einführendes Beispiel

Wir betrachten die unendliche *geometrische* Zahlenfolge

$$\langle a_n \rangle = 1;\ 0{,}2;\ 0{,}2^2;\ 0{,}2^3;\ \ldots \qquad \text{(VI-1)}$$

mit dem *Bildungsgesetz*

$$a_n = 0{,}2^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{(VI-2)}$$

Aus den Gliedern dieser Folge bilden wir sog. *Partial-* oder *Teilsummen*, indem wir Glied für Glied aufsummieren. Die ersten *Partialsummen* lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + 0{,}2 = 1{,}2 \\ s_3 &= 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 = 1{,}24 \\ s_4 &= 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 = 1{,}248 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \text{(VI-3)}$$

Wir fassen sie zu einer neuen (unendlichen) Folge, der sog. *Partialsummenfolge*

$$\langle s_n \rangle = s_1,\quad s_2,\quad s_3,\quad s_4,\quad \ldots \qquad \text{(VI-4)}$$

mit dem *Bildungsgesetz*

$$s_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2^{k-1} \qquad \text{(VI-5)}$$

zusammen. s_n ist dabei die n-te *Partialsumme*, d. h. die Summe der ersten n Glieder der Zahlenfolge (VI-1). Für die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ führen wir die neue Bezeichnung *Unendliche Reihe* ein und schreiben dafür symbolisch [1]:

$$1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1} \qquad \text{(VI-6)}$$

[1] Zur Erinnerung: Summen enthalten immer *endlich* viele Summanden. Die gewählte (allgemein übliche) Schreibweise für eine unendliche Reihe suggeriert, dass hier eine Summe mit *unendlich* vielen Gliedern (Summanden) gebildet wird. Dies jedoch ist allein aus zeitlicher Sicht *nicht* möglich! Um Missverständnissen gleich vorzubeugen: Die bekannten Rechenregeln für Summen dürfen *nicht* auf unendliche Reihen übertragen werden (siehe hierzu die späteren Ausführungen über den Umgang mit unendlichen Reihen in Abschnitt 1.2.3).

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-8348-8285-1_6,

Es stellt sich nun die Frage nach dem *Summenwert* einer unendlichen Reihe. Bei einer *endlichen* Reihe wird dieser durch *Addition* der endlich vielen Reihenglieder ermittelt. Bei einer *unendlichen* Reihe dagegen bilden wir den *Grenzwert der Partialsummenfolge* $\langle s_n \rangle$ und fassen ihn (falls er überhaupt vorhanden ist) als *Summenwert* der Reihe auf.

Wir kehren jetzt zu unserem Beispiel zurück und untersuchen, ob die Partialsummenfolge (VI-4) für $n \to \infty$ konvergiert, d. h. einen Grenzwert besitzt. Zunächst jedoch leiten wir eine *Berechnungsformel* für den *Summenwert* der n-ten Partialsumme

$$s_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} \qquad \text{(VI-7)}$$

her, die wir für die spätere Grenzwertbildung benötigen. Dazu wird die Partialsumme s_n beiderseits gliedweise mit 0,2 multipliziert und anschließend wie folgt die Differenz $s_n - 0{,}2 \cdot s_n$ gebildet:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1 + \boxed{0{,}2} + \boxed{0{,}2^2} + \boxed{0{,}2^3} + \ldots + \boxed{0{,}2^{n-1}} \\ 0{,}2 \cdot s_n &= \phantom{1 +{}} \boxed{0{,}2} + \boxed{0{,}2^2} + \boxed{0{,}2^3} + \ldots + \boxed{0{,}2^{n-1}} + 0{,}2^n \end{aligned}\right\} -$$

$$s_n - 0{,}2 \cdot s_n = 1 + 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad + \ldots + 0 \qquad - 0{,}2^n$$

$$0{,}8 \cdot s_n = 1 - 0{,}2^n$$

(die jeweils *grau* markierten untereinander stehenden Glieder heben sich bei der Differenzbildung jeweils auf).

Wir lösen jetzt diese Gleichung nach s_n auf und erhalten damit eine einfache *Berechnungsformel* für die n-te Partialsumme:

$$s_n = 1{,}25\,(1 - 0{,}2^n) \qquad \text{(VI-8)}$$

Diese Formel liefert uns beispielsweise für $n = 5$ bzw. $n = 10$ die folgenden Summenwerte:

$$s_5 = 1{,}25\,(1 - 0{,}2^5) = 1{,}25\,(1 - 0{,}00032) = 1{,}2496$$

$$s_{10} = 1{,}25\,(1 - 0{,}2^{10}) = 1{,}25\,(1 - 0{,}000\,000\,102) = 1{,}249\,999\,872$$

Selbstverständlich erhalten wir diese Werte auch auf dem direkten Wege, d. h. durch Aufaddieren der ersten 5 bzw. 10 Reihenglieder (bitte nachrechnen).

Für $n \to \infty$ strebt die Partialsummenfolge gegen den *Grenzwert*

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} 1{,}25\,(1 - 0{,}2^n) = 1{,}25 \qquad \text{(VI-9)}$$

da $\lim\limits_{n \to \infty} 0{,}2^n = 0$ ist. Die unendliche Reihe (VI-6) besitzt somit definitionsgemäß den *Summenwert* $s = 1{,}25$. Wir schreiben dafür *symbolisch*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1} = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots = 1{,}25 \qquad \text{(VI-10)}$$

Durch diese Schreibweise wollen wir zum Ausdruck bringen, dass sich die Partialsummen mit *zunehmender* Anzahl von Gliedern immer weniger von der Zahl 1,25 unterscheiden.

1.2 Grundbegriffe

1.2.1 Definition einer unendlichen Reihe

Wir gehen aus von einer *unendlichen Zahlenfolge*

$$\langle a_n \rangle = a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots \tag{VI-11}$$

und bilden aus den Gliedern dieser Folge wie folgt *Partial-* oder *Teilsummen*:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned} \tag{VI-12}$$

Die Folge $\langle s_n \rangle$ dieser Teilsummen heißt dann *Unendliche Reihe*.

Definition: Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heißt *unendliche Reihe*. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{VI-13}$$

Anmerkungen

(1) a_n ist das *n*-te Reihenglied.

(2) Der Laufindex n im Summensymbol kann auch bei der Zahl 0 oder einer anderen natürlichen Zahl beginnen.

(3) Die Glieder einer unendlichen Reihe sind (reelle) *Zahlen*. Daher spricht man in diesem Zusammenhang auch von einer *Zahlenreihe* oder *numerischen* Reihe.

(4) Unter dem *Bildungsgesetz* einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man einen funktionalen Zusammenhang $a_n = f(n)$, aus dem sich die Reihenglieder in Abhängigkeit von der natürlichen Zahl n berechnen lassen. Die Zuordnung $f(n) = a_n$ kann auch als eine Funktion der *diskreten* Variablen n aufgefasst werden (mit $n \in \mathbb{N}^*$).

■ **Beispiele**

(1) Aus der unendlichen Zahlenfolge

$$\left\langle a_n = \frac{1}{n} \right\rangle = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

entsteht durch Partialsummenbildung die sog. *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

(2) Aus der *geometrischen Folge*

$$\langle a_n = a q^{n-1} \rangle = a,\quad a q,\quad a q^2,\quad \ldots,\quad a q^{n-1},\ \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

erhalten wir durch Partialsummenbildung die sog. *geometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a + a q + a q^2 + \ldots + a q^{n-1} + \ldots$$

(3) Die Glieder der unendlichen Reihe

$$2{,}1 + 2{,}01 + 2{,}001 + 2{,}0001 + \ldots$$

genügen dem folgenden *Bildungsgesetz*:

$$a_n = 2 + 0{,}1^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

■

1.2.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

In dem einführenden Beispiel haben wir den *Summenwert* der vorgegebenen unendlichen Zahlenreihe als *Grenzwert* der zugehörigen *Partialsummenfolge* bestimmt. Dies führt zu der folgenden Definition:

Definition: Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s \qquad \text{(VI-14)}$$

Dieser Grenzwert wird als *Summenwert* der unendlichen Reihe bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s \qquad \text{(VI-15)}$$

Besitzt die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ jedoch *keinen* Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe *divergent*.

Anmerkungen

(1) Der *Summenwert* einer unendlichen Reihe ist also definitionsgemäß der *Grenzwert einer unendlichen Folge*, nämlich der Grenzwert der *Partialsummenfolge* $\langle s_n \rangle$. Die Konvergenz einer *unendlichen Reihe* wird damit auf die Konvergenz einer *unendlichen Folge* zurückgeführt (siehe hierzu Kap. III, Abschnitt 4.1.2).

(2) Eine *konvergente* unendliche Reihe besitzt also stets einen (eindeutigen) Summenwert, einer *divergenten* unendlichen Reihe lässt sich dagegen *kein* Summenwert zuordnen. Ist $s = +\infty$ oder $s = -\infty$, so nennt man die unendliche Reihe auch *bestimmt divergent*.

(3) Eine unendliche Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn die aus den *Beträgen* ihrer Glieder gebildete Reihe *konvergiert*. Eine absolut konvergente Reihe ist *stets* konvergent, d. h. aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ folgt stets die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (die Umkehrung jedoch gilt *nicht*).

■ **Beispiele**

(1) Wir zeigen, dass die als *geometrische Reihe* [2] bezeichnete unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

für $|q| < 1$ *konvergiert*, für $|q| \geq 1$ dagegen *divergiert*.
Zunächst bilden wir mit der n-ten *Partialsumme*

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}$$

die Differenz $s_n - q \cdot s_n$ und erhalten daraus eine einfache Formel für den *Summenwert* von s_n:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \phantom{1 +{}} q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n \end{aligned}\right\} -$$

$$s_n - q \cdot s_n = 1 - q^n$$

$$s_n (1 - q) = 1 - q^n$$

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

(die jeweils *grau* markierten untereinander stehenden Summanden heben sich bei der Differenzbildung jeweils auf).

[2] Eine unendliche Reihe heißt *geometrisch*, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder *konstant* ist. Die hier vorliegende Reihe besitzt den Quotienten q.

Die Folge der Partialsummen s_n besitzt dann für $|q| < 1$ den *Grenzwert*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \cdot \lim_{n \to \infty} (1 - q^n) =$$

$$= \frac{1}{1 - q} \left(1 - \lim_{n \to \infty} q^n\right) = \frac{1}{1 - q} (1 - 0) = \frac{1}{1 - q}$$

da in diesem Fall $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ ist. Für $|q| \geq 1$ dagegen *divergiert* die Zahlenfolge $\langle q^n \rangle$. Die unendliche *geometrische* Reihe besitzt somit für $|q| < 1$ den *Summenwert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

Zahlenbeispiel für $q = 1/3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

(2) Auf eine *geometrische Reihe* stößt man auch bei der Lösung der folgenden Aufgabe: Aus *Halbkreisen* soll, wie in Bild VI-1 dargelegt, eine *Spirale* gebildet werden, wobei die Radien von Halbkreis zu Halbkreis um jeweils 20 % abnehmen. Welche Gesamtlänge L besitzt diese aus *unendlich* vielen Halbkreisen gebildete Spirale, wenn der Radius des 1. Halbkreises R ist?

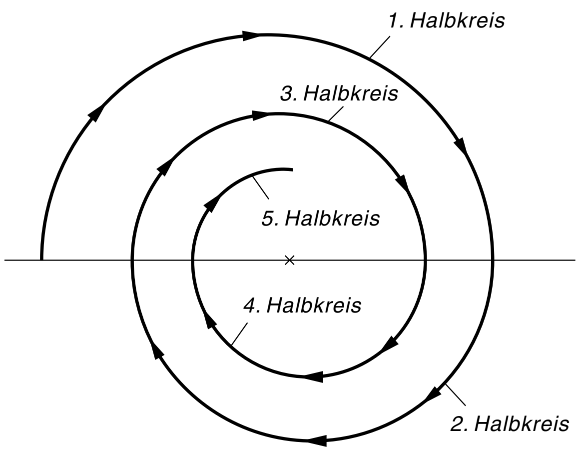

Bild VI-1 Zur Längenberechnung einer Spirale, zusammengesetzt aus ∞ vielen Halbkreisen

Lösung: Die ersten n Halbkreise haben der Reihe nach folgende Längen:

$$L_1 = \pi R, \qquad L_2 = \pi(0{,}8\,R) = 0{,}8 \cdot \pi R,$$

$$L_3 = \pi(0{,}8 \cdot 0{,}8\,R) = 0{,}8^2 \cdot \pi R, \quad \ldots, \quad L_n = 0{,}8^{n-1} \cdot \pi R$$

Damit beträgt die *Gesamtlänge* der ersten n Halbkreise (wir bezeichnen diese Partialsumme mit $L(n)$):

$$L(n) = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n =$$

$$= \pi R + 0{,}8 \cdot \pi R + 0{,}8^2 \cdot \pi R + \ldots + 0{,}8^{n-1} \cdot \pi R =$$

$$= \pi R\,(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1}) = \pi R \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}8^{n-1}$$

Vergrößert man die Anzahl n der Halbkreise beliebig, d. h. lässt man $n \to \infty$ laufen, so entsteht eine *geometrische Reihe* (Quotient zweier aufeinander folgender Reihenglieder: $q = 0{,}8$):

$$\pi R\,(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1} + \ldots) = \pi R \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}8^{n-1}$$

Der *Summenwert* dieser Reihe entspricht der gesuchten Länge L der Spirale:

$$L = \pi R\,(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1} + \ldots) = \pi R \cdot \frac{1}{1 - 0{,}8} = 5\pi R$$

Die Spirale hat also, obwohl aus *unendlich* vielen Halbkreisen zusammengesetzt, eine *endliche* Länge!

(3) Wir zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

bestimmt divergent ist. Die für die Grenzwertbildung benötigte n-te Partialsumme s_n kann dabei nach der Formel

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

berechnet werden (diese Formel für die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen haben wir der **Formelsammlung** entnommen → Kap. I, Abschnitt 3.4). Beim Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir hieraus:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

Die Reihe ist somit – wie behauptet – *bestimmt divergent*.

∎

1.2.3 Über den Umgang mit unendlichen Reihen

Die *formale* (*symbolische*) Schreibweise einer unendlichen Reihe in Form einer *Summe* aus *unendlich* vielen Summanden führt häufig zu Missverständnissen. Eine unendliche Reihe darf nämlich *nicht* als eine Erweiterung des Summenbegriffes von endlich vielen Summanden auf unendlich viele Summanden aufgefasst werden! Denn die für endliche Summen (d. h. Summen mit *endlich* vielen Summanden) gültigen Rechenregeln gelten im Allgemeinen *nicht* für unendliche Reihen. Bei einer (endlichen) Summe ist der Summenwert unabhängig von der Reihenfolge der Summanden (diese dürfen bekanntlich beliebig umgestellt werden) und auch unabhängig davon, ob und wie Klammern gesetzt werden [3]. Bei einer unendlichen Reihe kann sich jedoch der *Summenwert* der Reihe (sofern er überhaupt vorhanden ist) *ändern*, wenn man z. B. die Reihenfolge der Glieder verändert oder Glieder durch *Klammern* zusammenfasst.

Ein einfaches Beispiel soll diese wichtige Aussage verdeutlichen. Wir unterstellen zunächst, dass die für (endliche) Summen geltenden Rechenregeln auch für unendliche Reihen (unendliche Summen) *gültig* sind. Dann aber müsste der *Summenwert* der unendlichen Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

unabhängig vom eingeschlagenen Rechenweg sein [4]. Es bieten sich beispielsweise folgende Rechenvarianten an:

1. Variante: Wir setzen wie folgt Klammern:

$$\underbrace{(1 - 1)}_{0} + \underbrace{(1 - 1)}_{0} + \underbrace{(1 - 1)}_{0} + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

Der Summenwert der Reihe wäre somit $s = 0$, da *alle* Klammern verschwinden.

2. Variante: Wir beginnen mit der Klammerbildung erst *nach* dem 1. Glied:

$$1 + \underbrace{(-1 + 1)}_{0} + \underbrace{(-1 + 1)}_{0} + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$$

Wiederum verschwinden alle Klammern, die Reihe hätte damit den Summenwert $s = 1$.

Fazit: Wir erhalten also – je nach dem eingeschlagenen Rechenweg – *unterschiedliche* Ergebnisse!

Daraus folgern wir:

> Die bekannten Rechenregeln für endliche Summen (endliche Reihen) gelten im Allgemeinen *nicht* für unendliche Reihen (unendliche Summen).

---

[3] Zur Erinnerung: Die Addition ist eine *kommutative* und *assoziative* Rechenoperation (siehe Kap. I, Abschnitt 2.1).

[4] Es handelt sich hier um eine sog. *alternierende* Reihe, bei der die Glieder laufend ihr Vorzeichen *ändern*. Alle Glieder haben hier den gleichen Betrag $(= 1)$.

1.3 Konvergenzkriterien

Bei einer unendlichen Reihe ergeben sich automatisch zwei Fragestellungen:

1. Ist die vorliegende unendliche Reihe *konvergent*, d. h. besitzt sie einen (endlichen) Summenwert oder ist sie *divergent* [5]?
2. Welchen *Summenwert* besitzt die unendliche Reihe im Falle der Konvergenz?

Zur 1. Fragestellung: Die Frage nach dem Konvergenzverhalten einer Reihe lässt sich in der Regel mit Hilfe von sog. *Konvergenzkriterien* beantworten. Sie ermöglichen eine *Entscheidung* darüber, ob eine vorliegende unendliche Reihe konvergiert oder divergiert (siehe hierzu die in den nächsten Abschnitten besprochenen Kriterien).

Zur 2. Fragestellung: Der *Summenwert* einer konvergenten unendlichen Reihe lässt sich nur in wenigen Fällen exakt bestimmen, meist leider nur *näherungsweise* unter erheblichem Rechenaufwand und mit Unterstützung von Computern. Der Summenwert wird dabei durch eine *Partialsumme* angenähert (Abbruch der Reihe, sobald die gewünschte Genauigkeit erreicht ist).

Notwendiges Konvergenzkriterium

Für die *Konvergenz* einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad \text{(VI-16)}$$

notwendig, nicht aber hinreichend [6]. Mit anderen Worten: Damit die unendliche Reihe *konvergiert*, müssen die Reihenglieder diese Bedingung erfüllen. Jedoch darf man aus $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ keineswegs folgern, dass die unendliche Reihe konvergiert. Es gibt Reihen, die die Bedingung (VI-16) erfüllen und trotzdem *divergieren*. Eine Reihe jedoch, die das notwendige Konvergenzkriterium (VI-16) *nicht* erfüllt, kann nicht konvergent sein und ist daher *divergent*. Mit einem *notwendigen* Konvergenzkriterium kann also nur die *Divergenz*, nicht aber die Konvergenz einer unendlichen Reihe festgestellt werden!

Wir erläutern dieses Kriterium an zwei einfachen Beispielen.

■ **Beispiele**

(1) Sowohl die *geometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1} = 1 + 0{,}2^1 + 0{,}2^2 + \ldots + 0{,}2^{n-1} + \ldots$$

---

[5] In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen sind in der Regel nur *konvergente* Reihen von Bedeutung.

[6] Diese Bedingung besagt, dass die Reihenglieder eine sog. *Nullfolge* bilden.

als auch die *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

erfüllen das *notwendige Konvergenzkriterium* (VI-16):

$$\lim_{n \to \infty} 0{,}2^{n-1} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Aber nur die *geometrische Reihe* ist *konvergent*, d. h. besitzt einen *Summenwert*, wie wir aus dem einführenden Beispiel aus Abschnitt 1.1 bereits wissen (der Summenwert ist $s = 1{,}25$). Die *harmonische Reihe* dagegen ist *divergent*, wie man zeigen kann (auf den Beweis wollen wir verzichten). Die Bedingung (VI-16) reicht also für die Konvergenz einer Reihe *nicht* aus.

(2) Die unendliche Zahlenreihe

$$2{,}1 + 2{,}01 + 2{,}001 + 2{,}0001 + \ldots$$

mit dem *Bildungsgesetz*

$$a_n = 2 + 0{,}1^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ist *divergent*, da die Reihenglieder das für die Konvergenz notwendige Kriterium (VI-16) *nicht* erfüllen. Denn es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (2 + 0{,}1^n) = 2 + \lim_{n \to \infty} 0{,}1^n = 2 + 0 = 2 \neq 0$$

Die Reihenglieder bilden also *keine* Nullfolge.

■

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit den wichtigsten *hinreichenden* Konvergenzkriterien.

1.3.1 Quotientenkriterium

Bei der Untersuchung des *Konvergenzverhaltens* einer unendlichen Reihe erweist sich das folgende als *Quotientenkriterium* bezeichnete Kriterium als besonders geeignet:

Quotientenkriterium

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \qquad \text{(VI-17)}$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Anmerkungen

(1) Für $q = 1$ *versagt* das Quotientenkriterium, d. h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist mit diesem Kriterium *nicht* möglich. Die Reihe *kann* also konvergieren *oder* auch divergieren. In einem solchen Fall muss das Konvergenzverhalten der Reihe mit Hilfe *anderer* Kriterien untersucht werden.

(2) Das Quotientenkriterium liefert eine *hinreichende* Bedingung für die Reihenkonvergenz. Sie ist jedoch *nicht notwendig*, d. h. es gibt Reihen, für die der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ *nicht* vorhanden ist und die trotzdem konvergieren.

(3) Ist die Konvergenzbedingung (VI-17) erfüllt, so ist die unendliche Reihe sogar *absolut konvergent*.

■ **Beispiele**

(1) Wir zeigen anhand des *Quotientenkriteriums*, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n+2)!} + \ldots$$

konvergiert. Mit

$$a_n = \frac{1}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$$

liefert das Kriterium (VI-17) den folgenden Wert für den Grenzwert q:

$$q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{(2n+2)!}}{\dfrac{1}{(2n)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

Dabei haben wir von der „Zerlegung"

$$(2n+2)! = (2n)!\,(2n+1)(2n+2)$$

Gebrauch gemacht (Bild VI-2). Die Reihe ist daher wegen $q = 0 < 1$ *konvergent*, besitzt also einen *Summenwert*.

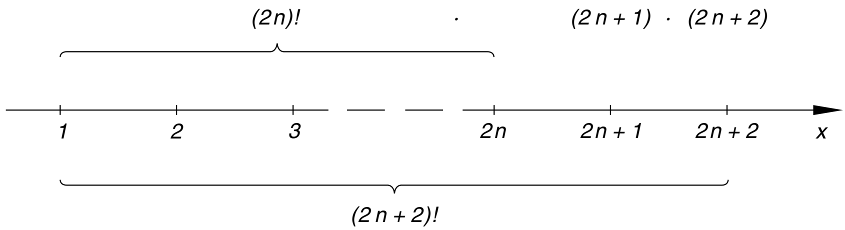

Bild VI-2 Zerlegung des Ausdrucks $(2n+2)!$ in ein Produkt mit dem Faktor $(2n)!$

(2) Das Quotientenkriterium *versagt* bei der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = \dfrac{1}{n}$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ erhalten wir nämlich nach (VI-17):

$$q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1$$

Mit diesem Kriterium lässt sich das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihe *nicht* feststellen (die Reihe ist – wie bereits erwähnt – *divergent*).

(3) Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

ist *konvergent*, obwohl auch hier das Quotientenkriterium (VI-17) *versagt*:

$$q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \dfrac{2}{n}} = 1$$

(Faktor $n + 1$ kürzen, dann Zähler und Nenner gliedweise durch n dividieren). Um die Konvergenz der Reihe nachzuweisen, zerlegen wir das n-te Reihenglied zunächst in zwei Summanden (Partialbruchzerlegung). Der Ansatz lautet:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(n+1)A + nB}{n(n+1)}$$

Somit gilt nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $n(n+1)$:

$$(n+1)A + nB = nA + A + nB = (A+B)n + A = 1$$

n ist hier eine *diskrete* Variable mit $n \in \mathbb{N}^*$. Wir ergänzen auf der rechten Seite den (verschwindenden) Summanden $0 \cdot n = 0$ und erhalten dann durch einen *Koeffizientenvergleich* zwei Gleichungen für die Unbekannten A und B:

$$(A+B)n + A = 0 \cdot n + 1 \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \text{und} \quad A = 1$$

Somit lautet die Lösung: $A = 1$, $B = -1$. Damit können wir die Reihe auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Die ersten n Partialsummen lauten dann:

$$s_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \left(\frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}}_{0} - \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = \left(\frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}}_{0} \underbrace{- \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}}_{0} - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{0} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

In der n-ten Partialsumme s_n treten die „inneren“ Glieder $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ jeweils *doppelt*, aber mit *unterschiedlichem* Vorzeichen auf und heben sich daher auf. Die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ *konvergiert* für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert 1:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Die vorliegende Reihe ist somit *konvergent* mit dem *Summenwert* $s = 1$. ■

1.3.2 Wurzelkriterium

Ein weiteres nützliches Konvergenzkriterium ist das folgende sog. *Wurzelkriterium*.

Wurzelkriterium

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1 \tag{VI-18}$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Anmerkungen

(1) Für $q = 1$ *versagt* das Wurzelkriterium.

(2) Die Bedingung (VI-18) ist *hinreichend*, nicht aber notwendig für die Konvergenz einer Reihe.

(3) Ist die Bedingung (VI-18) erfüllt, so ist die unendliche Reihe sogar *absolut konvergent*.

■ **Beispiel**

Wir zeigen mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

konvergiert. Mit $a_n = \dfrac{1}{n^n}$ liefert das Kriterium (VI-18) den folgenden Wert für q:

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Aus $q = 0 < 1$ folgt die *Konvergenz* der vorliegenden Reihe, die somit einen (endlichen, aber noch unbekannten) Summenwert besitzt (Näherungswerte erhält man durch Aufaddieren der Reihenglieder und Abbruch nach Erreichen der gewünschten Genauigkeit).

■

1.3.3 Vergleichskriterien

Das (noch unbekannte) Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe lässt sich häufig auch durch einen *Vergleich* mit einer anderen Reihe, deren Konvergenzverhalten *bekannt* ist, bestimmen. Kriterien dieser Art werden daher als *Vergleichskriterien* bezeichnet. Von Bedeutung sind dabei das *Majoranten-* und das *Minorantenkriterium* (ohne Beweis).

Vergleichskriterien für unendliche Reihen mit positiven Gliedern

Das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit positiven Gliedern lässt sich oft mit Hilfe einer geeigneten (konvergenten bzw. divergenten) *Vergleichsreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach den folgenden Kriterien bestimmen:

Majorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *konvergiert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Vergleichsreihe ist *konvergent*.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \le b_n \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*) \tag{VI-19}$$

Die (konvergente) Vergleichsreihe wird als *Majorante* oder *Oberreihe* bezeichnet.

Minorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *divergiert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Vergleichsreihe ist *divergent*.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \ge b_n \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*) \tag{VI-20}$$

Die (divergente) Vergleichsreihe wird als *Minorante* oder *Unterreihe* bezeichnet.

Anmerkungen

(1) Es genügt, wenn die Bedingung (VI-19) bzw. (VI-20) von einem gewissen n_0 an, d. h. erst für alle Reihenglieder mit $n \ge n_0$ erfüllt wird.

(2) Mit dem Majorantenkriterium kann die Konvergenz, mit dem Minorantenkriterium die Divergenz einer Reihe festgestellt werden.

■ **Beispiele**

(1) Wir zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

konvergent ist. Eine konvergente *Majorante* zu dieser Reihe lässt sich wie folgt finden.

Das n-te Glied der Reihe kann auch als Produkt der *Kehrwerte* aller natürlichen Zahlen von 1 bis n dargestellt werden:

$$a_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}$$

Wir verändern dieses Produkt jetzt wie folgt: Die ersten beiden Faktoren werden beibehalten, alle weiteren durch die größere Zahl $\frac{1}{2}$ ersetzt. Es entsteht dann die Ungleichung

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}}}_{\substack{\text{diese } (n-2) \\ \text{Faktoren werden} \\ \text{durch } 1/2 \text{ ersetzt}}} \le \underbrace{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}}_{(n-1) \text{ Faktoren}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Somit erhalten wir für das n-te Reihenglied die Abschätzung (Ungleichung)

$$a_n = \frac{1}{n!} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*)$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur für die ersten beiden Glieder. Ab dem 3. Glied gilt sogar

$$a_n = \frac{1}{n!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad (\text{für alle } n \ge 3)$$

Dies aber bedeutet, dass die Glieder der Reihe vom 3. Glied an *kleiner* sind als die entsprechenden Glieder der *konvergenten geometrischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

(geometrische Reihe für $q = 1/2$ mit dem Summenwert $s = 2$; siehe hierzu Beispiel (1) in Abschnitt 1.2.2). Damit ist die Konvergenzbestimmung (VI-19) des Majorantenkriteriums *erfüllt*. Die geometrische Reihe für $q = 1/2$ ist somit eine *Majorante* der vorliegenden Reihe und diese daher *konvergent* (sie besitzt im Übrigen den Summenwert $s = e - 1 \approx 1{,}7183$.

(2) Es lässt sich relativ leicht zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

divergent ist. Für jedes natürliche $n \geq 1$ gilt $\sqrt{n} \leq n$ und somit (nach *Kehrwertbildung*) die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*)$$

Vom 2. Reihenglied an sind die Glieder der vorliegenden Reihe sogar *größer* als die entsprechenden Glieder der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Die Bedingung (VI-20) des Minorantenkriteriums ist somit *erfüllt*. Aus der (bekannten) *Divergenz* der harmonischen Reihe folgt dann die *Divergenz* der vorliegenden Reihe. ∎

1.3.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Wir beschäftigen uns nun mit *alternierenden* Reihen, d. h. Reihen, deren Glieder *abwechselnd* positiv und negativ sind. Eine solche Reihe ist in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots \qquad \text{(VI-21)}$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ darstellbar. Der Faktor $(-1)^{n+1}$ ist dabei *abwechselnd* positiv und negativ und bestimmt somit das *Vorzeichen* der Glieder. Es wird daher auch als *Vorzeichenfaktor* bezeichnet.

Für *alternierende* Reihen existiert ein spezielles von *Leibniz* stammendes Konvergenzkriterium. Es lautet (ohne Beweis):

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots \qquad \text{(VI-22)}$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist *konvergent*, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

(VI-23)

Anmerkung

Eine alternierende Reihe ist demnach *konvergent*, wenn die *Beträge* ihrer Glieder eine *monoton fallende Nullfolge* bilden (*hinreichende* Konvergenzbedingung).

■ **Beispiele**

(1) Die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + - \ldots$$

ist *konvergent*, da die Beträge ihrer Glieder eine *monoton fallende Nullfolge* bilden und somit das hinreichende Leibnizsche Konvergenzkriterium (VI-23) erfüllen:

$$\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{4!} > \ldots > \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} > \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = 0$$

(2) Auch die sog. *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

konvergiert, da sie die *Konvergenzbedingungen* (VI-23) erfüllt:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(3) Die *alternierende geometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

dagegen ist *divergent*, da sie *keine* der beiden im *Leibnizschen Konvergenzkriterium* (VI-23) genannten Bedingungen erfüllt:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Die unendliche Zahlenfolge } \langle a_n = 1 \rangle \\ \text{ist } \textit{keine} \text{ monoton fallende Nullfolge!} \end{array}$$

■

1.4 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen

Konvergente Reihen besitzen die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften, die wir ohne Beweis anführen.

Eigenschaften konvergenter Reihen

1. Eine *konvergente* Reihe bleibt konvergent, wenn man *endlich viele* Glieder weglässt oder hinzufügt oder abändert.

   Dabei *kann* sich jedoch der Summenwert der Reihe *ändern*.

   Klammern dagegen dürfen im Allgemeinen *nicht* weggelassen werden, ebenso wenig darf die Reihenfolge der Glieder verändert werden.
2. Aufeinander folgende Glieder einer *konvergenten* Reihe dürfen durch eine Klammer *zusammengefasst* werden, wobei der Summenwert der Reihe *erhalten* bleibt.
3. Eine *konvergente* Reihe mit ausschließlich *nichtnegativen* Gliedern (d. h. $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$) ist stets *absolut konvergent*.
4. **Rechenregeln für konvergente Reihen**

   a) Eine *konvergente* Reihe darf *gliedweise* mit einer Konstanten c multipliziert werden, wobei sich auch der Summenwert s der Reihe mit dieser Konstanten multipliziert:

   $$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot s \qquad \text{(VI-24)}$$

   b) Zwei *konvergente* Reihen mit den Summenwerten s_a und s_b dürfen *gliedweise* addiert bzw. subtrahiert werden, wobei sich die Summenwerte addieren bzw. subtrahieren:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s_a \pm s_b \qquad \text{(VI-25)}$$

Für *absolut konvergente* Reihen gelten sogar (sinngemäß) die gleichen Rechenregeln wie für *endliche* Summen! Die Glieder einer solchen Reihe dürfen *beliebig* angeordnet werden, eine solche Umordnung hat *keinen* Einfluss auf den Summenwert der Reihe. Für ein Produkt zweier *absolut konvergenter* Reihen mit den Summenwerten s_a und s_b gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s_a \cdot s_b \qquad \text{(VI-26)}$$

Das Ausmultiplizieren erfolgt *gliedweise* wie bei *endlichen Summen* und kann z. B. nach dem folgenden Schema erfolgen:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
\hline
a_1 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\
a_2 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\
a_3 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$\underbrace{a_1 b_1}_{c_1} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1)}_{c_3} + \dots$$

■ **Beispiel**

In Abschnitt 1.3.4 haben wir bereits gezeigt, dass die *alternierende* harmonische Reihe *konvergent* ist. Wir dürfen daher aufeinander folgende Reihenglieder durch eine *Klammer* zu einem (neuen) Glied zusammenfassen. Wir erhalten auf diese Weise eine *neue* Darstellungsform der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} + - \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots =$$

$$= \left(\frac{2-1}{1 \cdot 2}\right) + \left(\frac{4-3}{3 \cdot 4}\right) + \left(\frac{6-5}{5 \cdot 6}\right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots =$$

Das *Bildungsgesetz* dieser Reihe lautet offensichtlich:

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*)$$

Somit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)n}$$

Der Summenwert der alternierenden harmonischen Reihe hat sich dabei *nicht* geändert. Wir werden in Abschnitt 3.2.2 zeigen, dass die Reihe den Summenwert $s = \ln 2$ besitzt (diese Reihe entsteht, wenn man die Logarithmusfunktion $\ln x$ um die Stelle $x_0 = 1$ in eine *Taylor-Reihe* entwickelt und für die Variable x dann den Wert $x = 2$ einsetzt). ■

2 Potenzreihen

2.1 Definition einer Potenzreihe

Potenzreihen unterscheiden sich von den bisher behandelten *Zahlenreihen* dadurch, dass ihre Glieder *Potenzen* und somit *Funktionen* einer unabhängigen Variablen x darstellen.

Definition: Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{VI-27}$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Zu einer etwas *allgemeineren* Darstellungsform der Potenzreihen gelangt man durch die Definitionsvorschrift

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \\ &= a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \end{aligned} \tag{VI-28}$$

Die Stelle x_0 heißt *Entwicklungspunkt* oder auch *Entwicklungszentrum*. Für $x_0 = 0$ erhalten wir die in den Anwendungen meist auftretende *spezielle* Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ („Entwicklung um den Nullpunkt"). Die *allgemeine* Form (VI-28) kann dabei stets mit Hilfe der *formalen Substitution* $z = x - x_0$ auf die spezielle Form (VI-27) zurückgeführt werden, so dass wir uns im Wesentlichen auf diesen Potenzreihentyp beschränken können.

■ **Beispiele**

(1) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

(2) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

(3) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \ldots$

■

2.2 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

Bei einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hängt der Wert eines jeden Gliedes und damit auch der *Summenwert* (falls er überhaupt vorhanden ist) noch vom Wert der unabhängigen Variablen x ab. Wir beschäftigen uns daher in diesem Abschnitt mit dem *Konvergenzverhalten* einer Potenzreihe und untersuchen insbesondere, für *welche* x-Werte die Reihe *konvergiert*.

Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Nach den Ausführungen in Abschnitt 1.2.2 konvergiert eine Potenzreihe $P(x)$ definitionsgemäß an einer Stelle x_1, wenn die Partialsummenfolge

$$\begin{aligned}
P_0(x_1) &= a_0 \\
P_1(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 \\
P_2(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\
&\vdots \\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{VI-29}$$

einem *Grenzwert*, dem sog. *Summenwert* $P(x_1)$, zustrebt. Besitzt diese Folge jedoch *keinen* Grenzwert, so ist die Potenzreihe an der Stelle x_1 *divergent*. Wir definieren daher:

Definition: Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert, heißt *Konvergenzbereich* der Potenzreihe.

Für $x = 0$ konvergiert *jede* Potenzreihe und besitzt dort den Summenwert $P(0) = a_0$. Es gibt Potenzreihen, die *nur* für $x = 0$ konvergieren und solche, die für *alle* $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Beispiele hierzu werden wir später noch kennenlernen. Allgemein lässt sich zeigen, dass eine Potenzreihe stets in einem bestimmten, zum Nullpunkt *symmetrisch* angeordneten Intervall $|x| < r$ *konvergiert* und außerhalb dieses Intervalls *divergiert*, wobei wir zunächst einmal vom Konvergenzverhalten der Reihe in den beiden Randpunkten $|x| = r$ absehen wollen (Bild VI-3).

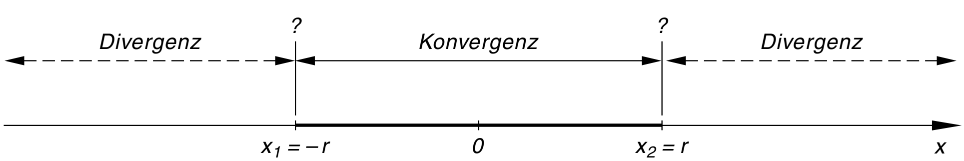

Bild VI-3 Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Geometrische Deutung des Konvergenzbereiches

Der *Konvergenzbereich* einer Potenzreihe lässt sich *geometrisch* wie folgt konstruieren.

Wir schlagen um den Nullpunkt der Zahlengerade (x-Achse) einen Kreis mit dem Radius r, den sog. *Konvergenzkreis* (Bild VI-3). Er schneidet die Zahlengerade an den Stellen $x_1 = -r$ und $x_2 = +r$. Der *Konvergenzbereich* der Potenzreihe ist dann der im *Innern* des Konvergenzkreises liegende Bereich der Zahlengerade. *Außerhalb* dieses Bereiches *divergiert* die Reihe. Der Radius r des Konvergenzkreises heißt daher in diesem Zusammenhang auch *Konvergenzradius*.

Über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe in den beiden *Randpunkten* lassen sich jedoch *keine* allgemeingültigen Aussagen machen. Es gibt Potenzreihen, die in *einem* der beiden Randpunkte oder sogar in *beiden* Randpunkten konvergieren, und solche, die in *keinem* der beiden Randpunkte konvergieren. Zur Feststellung des *Konvergenzverhaltens* in den *Randpunkten* bedarf es daher stets weiterer Untersuchungen.

Über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe (Bild VI-3)

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibt es eine *positive* Zahl r, *Konvergenzradius* genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe *konvergiert* überall im Intervall $|x| < r$.
2. Die Potenzreihe *divergiert* dagegen für $|x| > r$.
3. Über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den *Randpunkten* $|x| = r$ lassen sich jedoch *keine* allgemeingültigen Aussagen machen. Es bedarf hierzu weiterer Untersuchungen.

Anmerkungen

(1) Der *Konvergenzbereich* einer Potenzreihe besteht somit aus dem Intervall $|x| < r$, zu dem *gegebenenfalls* noch ein oder sogar beide Randpunkte hinzukommen.

(2) Konvergiert eine Potenzreihe *nur* an der Stelle $x = 0$, so setzt man $r = 0$.

(3) Eine *beständig*, d. h. für *alle* $x \in \mathbb{R}$ konvergierende Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $r = \infty$.

Berechnung des Konvergenzradius

Wir wollen nun eine Formel herleiten, mit der wir den *Konvergenzradius* r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berechnen können, wobei wir voraussetzen, dass *sämtliche* Koeffizienten a_n von Null *verschieden* sind. Nach dem *Quotientenkriterium* (VI-17) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn ihre Glieder die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \tag{VI-30}$$

erfüllen. Mit $b_n = a_n x^n$ und $b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$ erhalten wir hieraus die folgende *Konvergenzbedingung* für unsere Potenzreihe:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \tag{VI-31}$$

Durch Auflösen dieser Ungleichung nach $|x|$ erhalten wir schließlich

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \tag{VI-32}$$

wobei wir noch

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{VI-33}$$

gesetzt haben. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergiert* somit für $|x| < r$, d. h. r ist der gesuchte *Konvergenzradius* der Reihe.

Wir fassen dieses wichtige Ergebnis wie folgt zusammen:

Konvergenzradius einer Potenzreihe (Bild VI-3)

Der *Konvergenzradius* r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lässt sich nach der Formel

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{VI-34}$$

berechnen (Voraussetzung: alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ und der Grenzwert ist vorhanden). Die Reihe *konvergiert* dann für $|x| < r$ und *divergiert* für $|x| > r$ (siehe hierzu auch Bild VI-3). In den beiden Randpunkten $x_1 = -r$ und $x_2 = +r$ ist das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst *unbestimmt*. Es bedarf hier weiterer Untersuchungen.

Anmerkungen

(1) Der Konvergenzradius lässt sich auch nach der Formel

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{VI-35}$$

berechnen, die man aus dem *Wurzelkriterium* (VI-18) erhält.

(2) Die Formeln (VI-34) und (VI-35) gelten auch für den Konvergenzradius r einer Potenzreihe vom *allgemeinen* Typ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Diese Reihe *konvergiert* dann für $|x - x_0| < r$, d. h. im Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ und *divergiert* für $|x - x_0| > r$, während das Konvergenzverhalten in den beiden Randpunkten $x_1 = x_0 - r$ und $x_2 = x_0 + r$ zunächst *unbestimmt* ist (Bild VI-4).

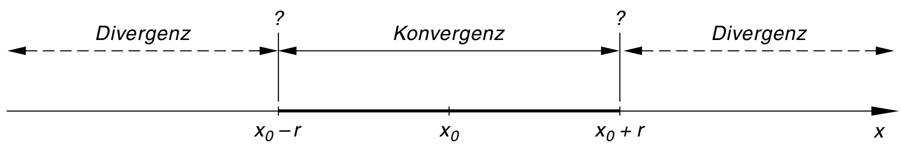

Bild VI-4 Konvergenzbereich einer Potenzreihe vom allgemeinen Typ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

■ **Beispiele**

(1) Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der *geometrischen Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = 1$ und $a_{n+1} = 1$ erhalten wir für den *Konvergenzradius* dieser Reihe nach Formel (VI-34):

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

Die geometrische Reihe *konvergiert* damit für $|x| < 1$ und *divergiert* für $|x| > 1$. Wir untersuchen jetzt das Konvergenzverhalten der Reihe in den beiden *Randpunkten*:

Randpunkt $x_1 = -1$: $\quad 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$

Randpunkt $x_2 = +1$: $\quad 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

Beide Zahlenreihen sind *divergent*. Die erste Reihe wurde bereits im Anschluss an das *Leibnizsche Konvergenzkriterium* untersucht und dort als *divergent* erkannt (siehe hierzu Abschnitt 1.3.4). Die zweite Reihe besitzt den *Summenwert* $s = \infty$ und ist daher *bestimmt divergent*. Die geometrische Reihe *konvergiert* demnach im offenen Intervall $-1 < x < 1$.

(2) Der *Konvergenzradius* der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

beträgt nach Formel (VI-34) mit $a_n = \dfrac{1}{n!}$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n!}\,(n+1)}{\cancel{n!}} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe ist daher *beständig konvergent*, d. h. sie konvergiert für jedes reelle x.

(3) Wir untersuchen die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \ldots$$

auf Konvergenz. Zunächst bringen wir die Reihe mit Hilfe der *Substitution* $z = x - 1$ in die etwas „bequemere" Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n} = \frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \ldots$$

Der *Konvergenzradius* dieser *alternierenden* Reihe beträgt dann mit

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = (-1)^{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

nach Formel (VI-34):

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}}{(-1)^{n+2} \cdot \dfrac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot \dfrac{1}{n}}{1 \cdot \dfrac{1}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Die Reihe *konvergiert* daher mit Sicherheit für $|z| < 1$. Wir untersuchen jetzt das Konvergenzverhalten in den beiden *Randpunkten*:

Randpunkt $z_1 = -1$: $\quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots = -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right)}_{\text{harmonische Reihe}}$

Die Reihe *divergiert* für $z = -1$, da die harmonische Reihe bekanntlich *divergiert* (siehe hierzu Beispiel (2) aus Abschnitt 1.3.1).

Randpunkt $z_2 = +1$: $\quad \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots}_{\substack{\text{alternierende} \\ \text{harmonische Reihe}}}$

Wir erhalten im *rechten* Randpunkt *Konvergenz*, da die alternierende harmonische Reihe bekanntlich *konvergiert* (siehe hierzu auch Abschnitt 1.3.4, 2. Beispiel). Damit *konvergiert* die Potenzreihe für alle z-Werte aus dem halboffenen Intervall $-1 < z \le 1$. Nach *Rücksubstitution* ergibt sich daher für die ursprüngliche Potenzreihe der folgende *Konvergenzbereich*:

$$-1 < x - 1 \le 1 \qquad \text{oder} \qquad 0 < x \le 2$$

■

2.3 Eigenschaften der Potenzreihen

Eine Potenzreihe $P(x)$ kann im *Innern* ihres Konvergenzkreises als eine *Funktion* der unabhängigen Variablen x aufgefasst werden, die *jedem* x aus dem Konvergenzintervall $(-r, r)$ mit Hilfe der Definitionsvorschrift $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ genau *einen* Funktionswert zuordnet. Potenzreihen besitzen bemerkenswerte Eigenschaften, von denen wir an dieser Stelle nur einige besonders wichtige aufzählen wollen:

Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen

1. Eine Potenzreihe konvergiert *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches *absolut*.
2. Eine Potenzreihe darf *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches beliebig oft *gliedweise* differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen besitzen den *gleichen* Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.
3. Zwei Potenzreihen dürfen im *gemeinsamen* Konvergenzbereich der Reihen *gliedweise* addiert, subtrahiert und miteinander multipliziert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann *mindestens* im *gemeinsamen Konvergenzbereich* der beiden Ausgangsreihen.

Anmerkung

Potenzreihen dürfen somit *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches wie *Polynomfunktionen* behandelt werden, d. h. sie dürfen *gliedweise* addiert, subtrahiert, miteinander multipliziert, differenziert und integriert werden.

■ **Beispiel**

Aus Abschnitt 2.2 ist bekannt, dass die *geometrische Reihe*

$$P(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

den Konvergenzradius $r = 1$ besitzt. Dies gilt auch für die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration gewonnenen Potenzreihen:

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots) =$$

$$= 0 + 1 + 2x^1 + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$\int P(x)\,dx = \int (1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots)\,dx =$$

$$= x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$$

■

3 Taylor-Reihen

Aus dem vorherigen Abschnitt ist bekannt, dass *Potenzreihen* in vieler Hinsicht ähnlich einfache Eigenschaften besitzen wie *Polynomfunktionen*. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass es unter gewissen Voraussetzungen *grundsätzlich* möglich ist, eine vorgegebene Funktion $f(x)$ in eine *Potenzreihe* zu *entwickeln*. Aus einer solchen Reihenentwicklung lassen sich dann durch Abbruch der Reihe einfache *Näherungsfunktionen* für $f(x)$ in Form von *Polynomen* gewinnen.

Die *Potenzreihenentwicklung* einer Funktion erweist sich in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen als ein außerordentlich nützliches mathematisches *Hilfsmittel* und wird z. B. bei der Lösung der folgenden Problemstellungen herangezogen:

– *Annäherung* einer Funktion durch eine *Polynomfunktion* (z. B. durch eine *lineare* oder *quadratische* Funktion)
– Näherungsweise Berechnung von *Funktionswerten*
– Herleitung von *Näherungsformeln* für die „praktische" Mathematik
– *Integration* einer Funktion durch Potenzreihenentwicklung des Integranden und anschließender gliedweiser Integration
– Näherungsweises Lösen von *Gleichungen*
– Auswertung sog. „unbestimmter Ausdrücke"

3.1 Ein einführendes Beispiel

Als einführendes Beispiel betrachten wir die besonders einfach gebaute *Potenzreihe*

$$P(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{VI-36}$$

Es handelt sich dabei um die bereits aus den Abschnitten 1.2.2 und 2.2 bekannte *geometrische Reihe* mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert *nur* für $|x| < 1$.
2. Die Reihe besitzt in diesem Konvergenzbereich den *Summenwert* $\dfrac{1}{1-x}$.

Daher gilt im Intervall $-1 < x < 1$:

$$1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \tag{VI-37}$$

Diese Gleichung lässt sich aber auch als *Gleichheit* zweier Funktionen interpretieren. Auf der rechten Seite der Gleichung steht die *gebrochenrationale* Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, auf der linken Seite die *Potenzreihe* $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Beide Funktionen stimmen überall im Intervall $-1 < x < 1$ in ihren Funktionswerten miteinander überein. Wir können daher in diesem Intervall die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ als eine *spezielle Darstellungsform* der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ansehen.

Man bezeichnet diese Art der Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe als *Potenzreihenentwicklung*. Dabei ist jedoch zu beachten, dass eine solche Darstellung stets auf ein bestimmtes Intervall *beschränkt* bleibt. In unserem Fall gilt die *Potenzreihenentwicklung*

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \tag{VI-38}$$

nur für das Intervall $-1 < x < 1$, obwohl die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ mit Ausnahme von $x = 1$ auch *außerhalb* dieses Intervalls definiert ist (siehe hierzu Bild VI-5).

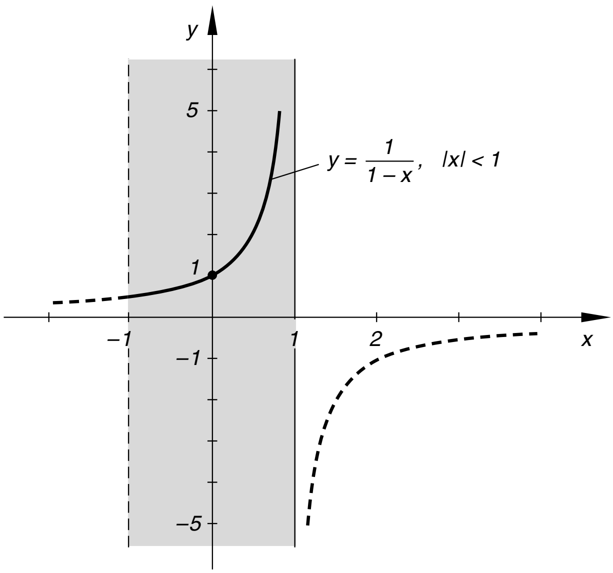

Bild VI-5 Zur Potenzreihenentwicklung der echt gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ im Intervall $-1 < x < 1$ (*grau* unterlegter Bereich)

3.2 Potenzreihenentwicklung einer Funktion

3.2.1 Mac Laurinsche Reihe

Bei unseren Überlegungen gehen wir zunächst von den folgenden *Annahmen* aus:

1. Die Entwicklung der Funktion $f(x)$ in eine *Potenzreihe* vom Typ

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \qquad \text{(VI-39)}$$

   ist grundsätzlich *möglich* und *eindeutig*.

2. Die Funktion $f(x)$ ist in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ *beliebig oft* differenzierbar und die Funktions- bzw. Ableitungswerte $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0), \ldots$ sind bekannt (oder können zumindest aus der Funktionsgleichung und deren Ableitungen berechnet werden).

Wir wollen jetzt zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ in der Potenzreihenentwicklung (VI-39) *eindeutig* durch die Funktions- und Ableitungswerte $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0), \ldots$ bestimmt sind. Ist r der *Konvergenzradius* der Potenzreihe, so konvergieren auch sämtliche durch *gliedweise* Differentiation gewonnenen Reihenentwicklungen für $|x| < r$.

Die ersten Ableitungen lauten dabei:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x^1 + 3 \cdot 4 \cdot a_4x^2 + \ldots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4x^1 + \ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{VI-40}$$

An der Stelle $x = 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 = 1 \cdot a_0 = (0!) \cdot a_0 \\ f'(0) &= a_1 = 1 \cdot a_1 = (1!) \cdot a_1 \\ f''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 = (2!) \cdot a_2 \\ f'''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = (3!) \cdot a_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{VI-41}$$

Aus diesen Beziehungen lassen sich die *Koeffizienten* wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!}, \qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ \ldots \tag{VI-42}$$

Offensichtlich genügen die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung (VI-39) dem allgemeinen *Bildungsgesetz*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{VI-43}$$

und sind durch die *Funktions-* und *Ableitungswerte* von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ *eindeutig* bestimmt.[7] Für die Potenzreihenentwicklung einer Funktion gilt daher unter den genannten Voraussetzungen:

Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe (Mac Laurinsche Reihe)

Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich eine Funktion $f(x)$ in eine *Potenzreihe* der Form

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \tag{VI-44}$$

entwickeln (sog. *Mac Laurinsche Reihe*).

[7] $f^{(0)}(0) = f(0)$: Die Funktion $f(x)$ wird hier (rein formal) als „nullte Ableitung" aufgefasst.

Anmerkungen

(1) *Nicht jede* Funktion ist in eine *Mac Laurinsche Reihe* entwickelbar. Eine für die Potenzreihenentwicklung *notwendige* Bedingung haben wir bereits erkannt: Die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ muss in der Umgebung der Entwicklungsstelle $x = 0$ *beliebig oft* differenzierbar sein. Diese Bedingung ist jedoch *keinesfalls hinreichend*, d. h. nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion ist in Form einer Potenzreihe darstellbar. Im Rahmen dieser Darstellung können wir auf Einzelheiten nicht näher eingehen und verweisen den Leser auf die spezielle mathematische Literatur. Im Zusammenhang mit der *Restgliedabschätzung* bei Näherungspolynomen werden wir dieses Thema aber nochmals kurz streifen (siehe hierzu Abschnitt 3.3.1).

(2) Die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x)$ ist die Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ um den *Nullpunkt* $x = 0$, der daher in diesem Zusammenhang auch als *Entwicklungspunkt* oder *Entwicklungszentrum* bezeichnet wird. Sie ist ein *Sonderfall* einer allgemeineren Potenzreihenentwicklung nach *Taylor*, mit der wir uns in Abschnitt 3.2.2 noch eingehend beschäftigen werden.

(3) Der *Konvergenzradius* r der *Mac Laurinschen Reihe* von $f(x)$ kann nach der Formel (VI-34) oder (VI-35) berechnet werden. *Innerhalb* des Konvergenzbereiches, d. h. für $|x| < r$ wird die Funktion $f(x)$ dabei durch ihre *Mac Laurinsche Reihe* dargestellt.

(4) Die *Symmetrieeigenschaften* einer Funktion spiegeln sich auch in ihrer *Mac Laurinschen Reihe* wider: In der Reihenentwicklung einer *geraden* Funktion treten nur *gerade*, in der Reihenentwicklung einer *ungeraden* Funktion dagegen nur *ungerade* Potenzen auf.

■ **Beispiele**

(1) **Mac Laurinsche Reihen von $f(x) = e^x$ und $f(x) = e^{-x}$**

Für die e-Funktion ist

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{und somit} \qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = e^x$ lautet demnach wie folgt:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Ihr Konvergenzradius beträgt $r = \infty$, d. h. die Reihe konvergiert *beständig* (siehe hierzu auch Beispiel (2) aus Abschnitt 2.2).

Ersetzen wir in der Reihenentwicklung von $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ die Variable x formal durch $-x$, so erhalten wir die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$:

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 + \frac{(-x)^1}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Sie konvergiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. *beständig*.

(2) **Mac Laurinsche Reihen von $f(x) = \cos x$ und $f(x) = \sin x$**

Wir entwickeln zunächst die *Kosinusfunktion* $f(x) = \cos x$ in eine *Mac Laurinsche Reihe*. Es ist:

$$\left.\begin{array}{lcl} f(x) = \cos x & \Rightarrow & f(0) = \cos 0 = 1 \\ f'(x) = -\sin x & \Rightarrow & f'(0) = -\sin 0 = 0 \\ f''(x) = -\cos x & \Rightarrow & f''(0) = -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) = \sin x & \Rightarrow & f'''(0) = \sin 0 = 0 \end{array}\right\} \text{Viererzyklus}$$

$$\overline{f^{(4)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1}$$

Ab der *vierten* Ableitung wiederholen sich die Ableitungswerte. In einem *regelmäßigen Viererzyklus* werden dabei der Reihe nach die Werte $1, 0, -1$ und 0 durchlaufen. Die *Mac Laurinsche Reihe* der Kosinusfunktion besitzt demnach die folgende Gestalt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sie enthält wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kosinuskurve zur y-Achse ausschließlich *gerade* Potenzen. Eine Berechnung des Konvergenzradius nach Formel (VI-34) ist zunächst nicht möglich, da in der Reihenentwicklung jeder *zweite* Koeffizient *verschwindet*. Wir helfen uns mit einem mathematischen „Trick" und bringen die Reihe mit Hilfe der Substitution $t = x^2$ auf eine neue Gestalt:

$$1 - \frac{t^1}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{(2n)!}$$

Diese Potenzreihe in der neuen Variablen t enthält *alle* Potenzen, ihr Konvergenzradius kann daher mit Hilfe der Formel (VI-34) berechnet werden:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (2n+2)!}{(2n)!\,(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}{(2n)!} = \lim_{n \to \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

Die Reihe konvergiert somit für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Wegen $x^2 = t$ und somit $x = \sqrt{t}$ gilt dies auch für *alle* $x \in \mathbb{R}$, d. h. die Kosinusreihe konvergiert (erwartungsgemäß) *beständig*.

Die *Mac Laurinsche Reihe* der *Sinusfunktion* erhalten wir am bequemsten durch *gliedweise Differentiation* der Kosinusreihe (bekanntlich ist $(\cos x)' = -\sin x$ und damit $\sin x = -(\cos x)'$):

$$\sin x = -\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots\right) =$$

$$= -\left(0 - \frac{2x^1}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + - \ldots\right) =$$

$$= \frac{2x^1}{1 \cdot 2} - \frac{4x^3}{3!\,4} + \frac{6x^5}{5!\,6} - + \ldots = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Sie konvergiert ebenso wie die Mac Laurinsche Reihe der Kosinusfunktion *beständig*. Auch diese Potenzreihe lässt sich natürlich auf *direktem* Wege über die Mac Laurinsche Entwicklungsformel (VI-44) herleiten. Wegen der *Punktsymmetrie* der Sinusfunktion treten in der Potenzreihenentwicklung nur *ungerade* Potenzen auf.

(3) **Binomische Reihe $(1 \pm x)^n$**

Wir entwickeln zunächst die Funktion $f(x) = (1 + x)^n$ mit $n \in \mathbb{R}$ in eine *Mac Laurinsche* Reihe. Die dabei benötigten Ableitungen und ihre Werte an der Stelle $x = 0$ lauten:

$$f(x) = (1+x)^n \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = n$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = n(n-1)$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = n(n-1)(n-2)$$

$$\vdots$$

Die *Mac Laurinsche Reihenentwicklung* nach Formel (VI-44) beginnt daher wie folgt:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{n}{1}x^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$

Die Koeffizienten dieser Reihe sind die bereits aus Kap. I (Abschnitt 6) bekannten *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = (1+x)^n$ ist damit in der Form

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

darstellbar und wird als *Binomische Reihe* oder auch *Binomialreihe* bezeichnet.

Bei der Berechnung des Konvergenzradius r dieser Reihe müssen wir die Fälle $n \in \mathbb{N}^*$ und $n \notin \mathbb{N}^*$ unterscheiden.

1. Fall: $n \in \mathbb{N}^*$

Die *Binomische Reihe* bricht nach der n-ten Potenz, d. h. nach dem $(n+1)$-ten Glied ab, da $(1+x)^n$ in diesem Sonderfall ein *Polynom n-ten Grades* darstellt. Die „Reihenentwicklung" konvergiert selbstverständlich für *jedes* $x \in \mathbb{R}$.

2. Fall: $n \notin \mathbb{N}^*$

Wir erhalten jetzt eine *echte* Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r = 1$:

$$r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot (k+1)}} \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot (k+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{k+1}{n-k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{1 + \dfrac{1}{k}}{\dfrac{n}{k} - 1} \right| = \left| \frac{1+0}{0-1} \right| = |-1| = 1$$

(die *grau* unterlegten Faktoren im Bruch kürzen sich heraus). Die *Binomialreihe* konvergiert daher für $|x| < 1$ und im Falle $n > 0$ sogar für $|x| \leq 1$ (siehe hierzu auch Tabelle 1 in Abschnitt 3.2.3).

Die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 - x)^n$ erhalten wir auf *formalem* Wege aus der *Binomischen Reihe* $(1 + x)^n$, indem wir dort x durch $-x$ ersetzen:

$$(1 - x)^n = 1 + \binom{n}{1}(-x)^1 + \binom{n}{2}(-x)^2 + \binom{n}{3}(-x)^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + - \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} x^k$$

Wir fassen die Potenzreihenentwicklungen von $(1 + x)^n$ und $(1 - x)^n$ noch in *einer* Formel zusammen:

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 \pm \binom{n}{3}x^3 + \ldots$$

Zahlenbeispiele

Für $n = 1/2$ erhalten wir beispielsweise die *Binomischen Reihen*

$$(1 \pm x)^{1/2} = \sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x^1 - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \ldots$$

Sie konvergieren im Intervall $|x| \le 1$.

Für $n = -1$ lauten die *Binomischen Reihen* wie folgt:

$$(1 \pm x)^{-1} = \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x^1 + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots$$

Beide Reihen konvergieren für $|x| < 1$.

Anmerkung

Das etwas allgemeinere *Binom* $(a \pm b)^n$ mit $n \in \mathbb{R}$ lässt sich stets wie folgt auf die *Binomische Reihe* $(1 \pm x)^n$ zurückführen:

$$(a \pm b)^n = \left[a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^n = a^n (1 \pm x)^n$$

wobei $x = b/a$ gesetzt wurde.

(4) **Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$**

Die Herleitung der gesuchten Potenzreihe auf dem direkten Wege über die Entwicklungsformel (VI-44) wäre sehr mühsam (hoher Aufwand bei Differenzieren mit Hilfe der *Quotienten-* und *Kettenregel*). Wir beschreiben daher einen anderen Weg (Reihenmultiplikation genannt).

Diese Funktion lässt sich auch wie folgt als *Produkt* zweier relativ einfacher Funktionen darstellen:

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - x} = e^x \cdot \frac{1}{1 - x} = e^x \cdot (1 - x)^{-1}$$

Wir gehen im Weiteren von den bereits bekannten *Mac Laurinschen Reihen* der beiden *Faktorfunktionen* $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = (1 - x)^{-1}$ aus:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Durch *gliedweise Multiplikation* dieser Reihen erhalten wir die gewünschte Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{1 - x}$. Beim *gliedweisen* Ausmultiplizieren (wie bei *endlichen Summen*) sollen dabei nur Potenzen bis einschließlich 3. Grades berücksichtigt werden. Die Potenzreihenentwicklung beginnt dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1 - x} &= e^x (1 - x)^{-1} = \\
&= \left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)(1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots) = \\
&= \left(1 + x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots\right)(1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots) = \\
&= 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \\
&\quad\; + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \\
&\quad\; + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots \\
&\quad\; + \frac{1}{6}x^3 + \ldots = \\
&= 1 + 2x^1 + \underbrace{\left(2 + \frac{1}{2}\right)}_{5/2} x^2 + \underbrace{\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)}_{16/6 \, = \, 8/3} x^3 + \ldots = \\
&= 1 + 2x^1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert im Intervall $|x| < 1$. ■

3.2.2 Taylorsche Reihe

Die Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f(x)$ um den *Nullpunkt* $x_0 = 0$ führte uns zur *Mac Laurinschen Reihe* von $f(x)$. Sie ist ein in den Anwendungen besonders wichtiger *Sonderfall* einer allgemeineren, nach *Taylor* benannten Reihenentwicklung. Denn grundsätzlich kann man eine Funktion $f(x)$ um eine *beliebige* Stelle x_0 entwickeln, wenn dort die *gleichen* Voraussetzungen wie bei der *Mac Laurinschen Reihe* vorliegen. Die dann als *Taylorsche Reihe* von $f(x)$ bezeichnete Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ besitzt dabei die folgende Gestalt:

Taylorsche Reihe einer Funktion

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{(VI-45)}$$

x_0: Entwicklungszentrum oder Entwicklungspunkt

Anmerkungen

(1) Für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ geht die *Taylorsche Reihe* (VI-45) in die *Mac Laurinsche Reihe* (VI-44) über, die somit nichts anderes darstellt als eine *spezielle* Form der Taylorschen Reihe.

(2) Der Konvergenzradius r der *Taylorschen Reihe* wird nach der Formel (VI-34) oder (VI-35) bestimmt. Die Reihe *konvergiert* dann für jedes x aus $|x - x_0| < r$, d. h. überall im Intervall $x_0 - r < x < x_0 + r$.

■ **Beispiel**

Die Entwicklung der logarithmischen Funktion $f(x) = \ln x$ in eine *Mac Laurinsche Reihe* ist *nicht* möglich, da der Logarithmus an der Stelle $x = 0$ bekanntlich nicht definiert ist. Wir wählen daher $x_0 = 1$ als *Entwicklungszentrum*. Für die benötigten Funktions- und Ableitungswerte an dieser Stelle erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & &\Rightarrow & f(1) &= \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & &\Rightarrow & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= -x^{-2} & &\Rightarrow & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= 2 \cdot x^{-3} & &\Rightarrow & f'''(1) &= 2 \\
f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3 \cdot x^{-4} & &\Rightarrow & f^{(4)}(1) &= -2 \cdot 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die gesuchte *Taylorsche Reihe* von $f(x) = \ln x$ um das Entwicklungszentrum $x_0 = 1$ lautet somit:

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{2\cdot 3}{4!}(x-1)^4 + - \ldots =$$

$$= \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{2\cdot 3(x-1)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + - \ldots =$$

$$= \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$$

Die *sehr langsam* konvergierende Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $r = 1$ und den Konvergenzbereich $0 < x \le 2$. In diesem und nur diesem Intervall repräsentiert die Reihe den natürlichen Logarithmus. So erhalten wir beispielsweise an der Stelle $x = 2$ eine Darstellung des Funktionswertes $\ln 2$ durch die bekannte *alternierende harmonische Reihe*:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

Der Summenwert beträgt 0,6931 (auf vier Dezimalstellen nach dem Komma genau).

■

3.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen

Der Leser findet in der nachfolgenden Tabelle 1 eine Zusammenstellung der Potenzreihenentwicklungen einiger besonders wichtiger Funktionen.

Tabelle 1: Potenzreihenentwicklungen einiger besonders wichtiger Funktionen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
	Allgemeine Binomische Reihe[8]	
$(1 \pm x)^n$	$1 \pm \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \ldots$	$n > 0: \lvert x \rvert \le 1$ $n < 0: \lvert x \rvert < 1$
	Spezielle Binomische Reihen	
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2} x^1 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2} x^1 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$

[8] Für den Sonderfall $n \in \mathbb{N}^*$ erhalten wir ein *Polynom* n-ten *Grades*, das selbstverständlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ „konvergiert“.

Tabelle 1: Fortsetzung

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x^1 + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots$	$\|x\| < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x^1 + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots$	$\|x\| < 1$
	Trigonometrische Reihen	
$\sin x$	$\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\tan x$	$x^1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$	$\|x\| < \frac{\pi}{2}$
	Exponential- und logarithmische Reihen	
e^x	$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\ln x$	$\frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \ldots$	$0 < x \le 2$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2\left(\frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\right)$	$\|x\| < 1$
	Reihen der Arkusfunktionen	
$\arcsin x$	$x^1 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots$	$\|x\| < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left(x^1 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots\right)$	$\|x\| < 1$
$\arctan x$	$\frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \ldots$	$\|x\| \le 1$
	Reihen der Hyperbelfunktionen	
$\sinh x$	$\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\tanh x$	$x^1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - + \ldots$	$\|x\| < \frac{\pi}{2}$

3.3 Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen

3.3.1 Näherungspolynome einer Funktion

In den praktischen Anwendungen besteht häufig der Wunsch, eine vorgegebene Funktion $f(x)$ durch eine *Polynomfunktion* anzunähern bzw. zu ersetzen. Denn Polynomfunktionen besitzen bekanntlich besonders *einfache* und *überschaubare* Eigenschaften. Mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung* lässt sich diese Aufgabe in vielen Fällen wie folgt lösen. Wir entwickeln zunächst die Funktion $f(x)$ in eine *Mac Laurinsche Reihe*[9]:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad \text{(VI-46)}$$

Durch *Abbruch* dieser Reihe nach der n-ten Potenz erhalten wir das folgende *Näherungspolynom n-ten Grades* für $f(x)$ (auch *Mac Laurinsches Polynom* genannt):

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{(VI-47)}$$

Die dabei vernachlässigten (unendlich vielen!) Glieder fassen wir zu einem sog. *Restglied* $R_n(x)$ zusammen:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \ldots \qquad \text{(VI-48)}$$

Das Restglied erfasst somit alle Reihenglieder der Entwicklung (VI-46) *ab* der $(n+1)$-ten Potenz. Die Funktion $f(x)$ unterscheidet sich also von ihrem Näherungspolynom $f_n(x)$ durch das *Restglied* $R_n(x)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_n(x) + R_n(x) = \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \end{aligned} \qquad \text{(VI-49)}$$

Diese Darstellungsform der Funktion $f(x)$ als *Summe* aus einem *Polynom* n-ten Grades und einem *Restglied* wird allgemein als *Taylorsche Formel* bezeichnet.

Taylorsche Formel

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x) \qquad \text{(VI-50)}$$

Dabei bedeuten:

$f_n(x)$: *Mac Laurinsches Polynom* vom Grade n nach Gleichung (VI-47)

$R_n(x)$: *Restglied* nach Gleichung (VI-48)

---

[9] Die folgenden Überlegungen gelten sinngemäß auch für Potenzreihenentwicklungen um eine (beliebige) Stelle x_0, wobei wir dann von der *Taylorschen Reihe* von $f(x)$ ausgehen müssen.

Die *Güte* der Mac Laurinschen Näherungspolynome lässt sich dabei durch Hinzunahme weiterer Glieder stets noch *verbessern*. Gleichzeitig verliert das Restglied $R_n(x)$ immer mehr an Bedeutung und wird schließlich *vernachlässigbar* klein [10)]. Das Restglied beschreibt somit den *Fehler*, den man begeht, wenn man die Funktion $f(x)$ durch ihr Näherungspolynom $f_n(x)$ *ersetzt*. Es ist in der Praxis jedoch nahezu *unmöglich*, den *exakten* Wert des Restgliedes $R_n(x)$ zu bestimmen. Der durch die Vernachlässigung des Restgliedes entstandene Fehler kann daher in der Regel nur *abgeschätzt* werden. Meist wird hierzu die folgende von *Lagrange* stammende Form des Restgliedes $R_n(x)$ herangezogen:

Restglied nach Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1) \tag{VI-51}$$

Anmerkung

Neben der *Lagrangeschen* Form kennt man noch weitere Formen des Restgliedes, z. B. die nach *Cauchy* und *Euler* benannten Formen. Im Rahmen dieser (einführenden) Darstellung können wir darauf nicht näher eingehen.

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Das Restglied $R_n(x)$ verschwindet stets für $x = 0$: $R_n(0) = 0$. Daher stimmen Funktion $f(x)$ und Näherungspolynom $f_n(x)$ an dieser Stelle in ihren Funktions- und Ableitungswerten bis zur n-ten *Ordnung* überein. Es gilt somit für jedes $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(0) = f_n(0) \qquad \text{und} \qquad f^{(k)}(0) = f_n^{(k)}(0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{VI-52}$$

Wir deuten diese Gleichungen *geometrisch* wie folgt:

Die erste Gleichung besagt, dass *alle* Näherungspolynome durch den Kurvenpunkt $P = (0; f(0))$ verlaufen, in dessen Umgebung die Reihenentwicklung vorgenommen wurde. Aus der zweiten Gleichung folgern wir speziell für $n = 1$ bzw. $n = 2$:

Für $n = 1$:

Die Kurve $y = f(x)$ wird in der Umgebung von P näherungsweise durch ihre *Kurventangente*, d. h. durch die *lineare* Funktion

$$f_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x \tag{VI-53}$$

ersetzt (Bild VI-6).

---

10) Bei einer *konvergenten* Reihe werden die Glieder mit zunehmender „Platzzifffer“ n *kleiner*: Sie bilden eine sog. *Nullfolge*. Dies ist eine *notwendige* Bedingung für die Reihenkonvergenz!

Man bezeichnet diesen Vorgang auch als *Linearisierung einer Funktion*[11].

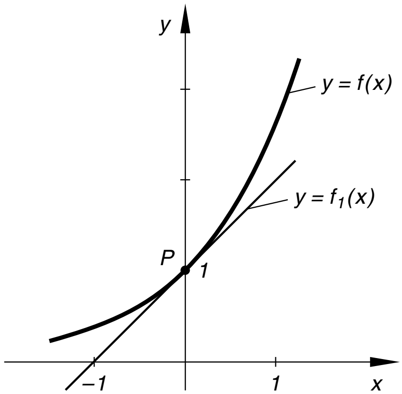

Bild VI-6
Zur Linearisierung einer Funktion
(gezeichnet: e-Funktion und ihre
Tangente in $P = (0; 1)$)

Für $n = 2$:

Die Kurve $y = f(x)$ wird jetzt durch eine *quadratische* Funktion, d. h. durch eine *Parabel* mit der Funktionsgleichung

$$f_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 \tag{VI-54}$$

angenähert (Bild VI-7). Kurve und Parabel besitzen dabei in P eine *gemeinsame* Tangente und *gleiche* Kurvenkrümmung.

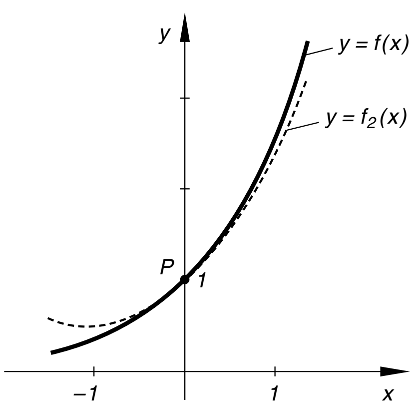

Bild VI-7
Näherungspolynom 2. Grades (Parabel)
(gezeichnet: e-Funktion und ihre
Näherungsparabel in $P = (0; 1)$)

[11] Das Problem der *Linearisierung einer Funktion* wurde bereits in Kap. IV (Abschnitt 3.2) eingehend behandelt.

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

Näherungspolynome einer Funktion (Mac Laurinsche Polynome)

Von einer Funktion $f(x)$ lassen sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung wie folgt *Näherungspolynome* gewinnen (sog. *Mac Laurinsche Polynome*):

1. Zunächst wird $f(x)$ um den Nullpunkt $x_0 = 0$ in eine *Mac Laurinsche Reihe* entwickelt.
2. Durch *Abbruch* der Reihe nach der *n-ten* Potenz erhält man dann ein Polynom $f_n(x)$ vom Grade n, das in der Umgebung des Nullpunktes *näherungsweise* das Verhalten der Funktion $f(x)$ beschreibt:

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{(VI-55)}$$

3. **Fehlerabschätzung:** Der durch Abbruch der Potenzreihe entstandene *Fehler* ist durch das *Restglied* $R_n(x)$ gegeben und lässt sich in manchen Fällen mit Hilfe der *Lagrangeschen* Restgliedformel (VI-51) *abschätzen*. Er liegt in der *Größenordnung* des *größten* Reihengliedes, das in der Näherung nicht mehr berücksichtigt wurde.

Anmerkungen

(1) Grundsätzlich gilt: Die *1. Näherung* von $f(x)$ erhalten wir durch Abbruch der Potenzreihe nach dem *ersten* nichtkonstanten Glied, die *2. Näherung* durch Abbruch nach dem *zweiten* nichtkonstanten Glied usw..

(2) Wird $f(x)$ durch ein Polynom 1. Grades, d. h. durch eine *lineare* Funktion angenähert, so sagt man, man habe die Funktion $f(x)$ *linearisiert*. *Geometrische Deutung:* Die Kurve wird in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$ durch die dortige *Kurventangente* ersetzt.

(3) Allgemein gilt: Die *Güte* einer Näherungsfunktion ist umso besser, je mehr Reihenglieder berücksichtigt werden.

(4) Alle Aussagen gelten sinngemäß auch für *Taylorsche* Reihenentwicklungen, d. h. Potenzreihenentwicklungen um ein (beliebiges) Entwicklungszentrum x_0. Die Näherungsfunktionen heißen dann *Taylorsche Polynome* und sind vom Typ

$$f_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{(VI-56)}$$

(5) Eine Funktion $f(x)$ ist unter den folgenden Voraussetzungen in eine (unendliche) *Mac Laurinsche Reihe* entwickelbar:

1. $f(x)$ ist in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes $x_0 = 0$ *beliebig oft* differenzierbar.
2. Das (Lagrangesche) Restglied $R_n(x)$ *verschwindet* beim Grenzübergang $n \to \infty$, d. h. es gilt

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{(VI-57)}$$

■ **Beispiele**

(1) **Berechnung der Eulerschen Zahl e**

Wir gehen von der *Mac Laurinschen* Reihe der e-Funktion aus:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Durch *Abbruch* der Reihe nach der *n-ten* Potenz erhalten wir das folgende *Näherungspolynom* n-ten Grades für e^x:

$$\mathrm{e}^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Der dabei begangene *Fehler* ist durch das *Lagrangesche Restglied* gegeben. Es lautet:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\vartheta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Für $x = 1$ erhalten wir aus dem Mac Laurinschen Näherungspolynom eine *Formel* zur näherungsweisen Berechnung der *Eulerschen Zahl* e:

$$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Das *Lagrangesche Restglied* liefert die folgende *Fehlerabschätzung*:

$$R_n(1) = \frac{\mathrm{e}^{\vartheta \cdot 1}}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\vartheta}}{(n+1)!} < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

(wegen $\mathrm{e}^{\vartheta} < \mathrm{e} < 3$ für $0 < \vartheta < 1$).

Wir geben jetzt zwei Rechenbeispiele.

Rechenbeispiel 1:

Wir berechnen die *Eulersche Zahl* e *näherungsweise* für $n = 5$ und erhalten:

$$\mathrm{e} \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2{,}716\,667$$

Die *Fehlerabschätzung* liefert:

$$R_5(1) < \frac{3}{(5+1)!} = \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0{,}0042 < 0{,}5 \cdot 10^{-2}$$

Wir haben damit die *Eulersche* Zahl auf *zwei* Dezimalstellen nach dem Komma genau berechnet: $\mathrm{e} \approx 2{,}71$.

Rechenbeispiel 2:

Wir wollen nun die *Eulersche* Zahl auf *vier* Dezimalstellen nach dem Komma genau berechnen. Für das Restglied $R_n(1)$ gilt dann die *Abschätzung*

$$R_n(1) < 0{,}5 \cdot 10^{-4} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Durch Auflösen nach $(n+1)!$ folgt weiter:

$$(n+1)! > \frac{3}{0{,}5 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 2 \cdot 10^4 = 60\,000$$

$$(n+1)! > 60\,000 \quad \Rightarrow \quad n \geq 8$$

Wir müssen somit $n = 8$ wählen, d. h. die ersten 9 Reihenglieder aufaddieren, um eine Genauigkeit von *vier* Dezimalstellen nach dem Komma zu erreichen:

$$\mathrm{e} \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40\,320} = 2{,}718\,279$$

Damit ist $\mathrm{e} \approx 2{,}7182$.

(2) Wir kehren zu unserem einführenden Beispiel, der echt gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, zurück. Aus ihrer Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

erhalten wir durch Reihenabbruch die folgenden *Näherungspolynome* 1., 2. und 3. Grades:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{1. Näherung:} & f_1(x) = 1 + x \\ \textit{2. Näherung:} & f_2(x) = 1 + x + x^2 \\ \textit{3. Näherung:} & f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \end{array}\right\} |x| < 1$$

Bild VI-8 zeigt deutlich, wie die Güte der Näherungsfunktion mit zunehmendem Polynomgrad *wächst*.

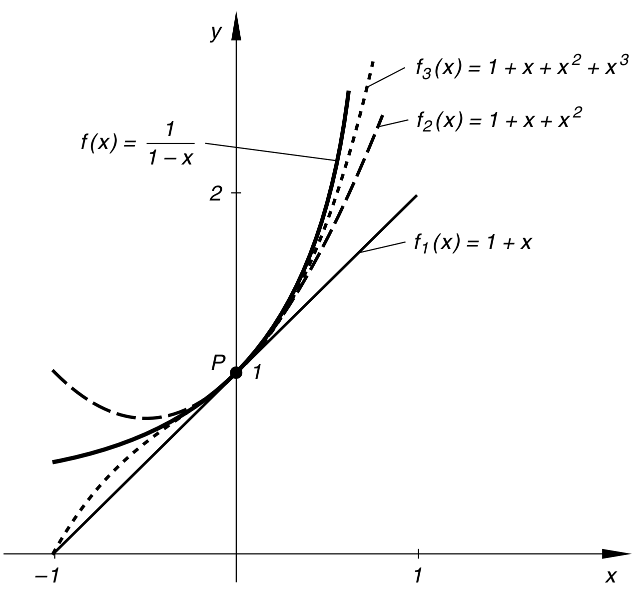

Bild VI-8 Die ersten Näherungspolynome der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ im Intervall $-1 < x < 1$

(3) Aus der Mac Laurinschen Reihe der *Kosinusfunktion*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

erhalten wir der Reihe nach die folgenden *Näherungspolynome* 2., 4., 6., ... Grades für $f(x) = \cos x$, deren Verlauf in Bild VI-9 wiedergegeben ist:

1. Näherung: $f_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} = 1 - \dfrac{x^2}{2}$

2. Näherung: $f_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

3. Näherung: $f_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720}$

$\vdots$

Anmerkung

Wegen der *Achsensymmetrie* der Kosinusfunktion bezüglich der y-Achse treten in der Mac Laurinschen Reihe von $\cos x$ nur *gerade* Potenzen auf. Näherungspolynome 1., 3., 5., ... Grades kann es daher *nicht* geben.

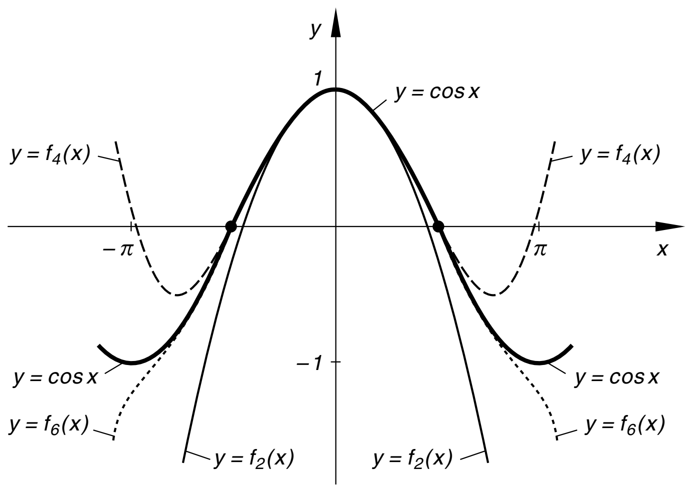

Bild VI-9 Näherungspolynome 2., 4. und 6. Grades für die Kosinusfunktion

Die mit diesen Näherungsfunktionen an den Stellen $x = 0{,}1$, $x = 0{,}5$ und $x = 1$ berechneten Funktionswerte lauten:

Näherung	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}5$	$x = 1$
$f_2(x)$	0,995 000	0,875 000	0,500 000
$f_4(x)$	0,995 004	0,877 604	0,541 667
$f_6(x)$	0,995 004	0,877 582	0,540 278
$\vdots$			
Exakter Funktionswert ($\cos x$)	0,995 004	0,877 583	0,540 302

Wir stellen fest: Je *weiter* wir uns vom Entwicklungszentrum (hier $x_0 = 0$) *entfernen*, umso *mehr* Reihenglieder müssen berücksichtigt werden, um vergleichbare Genauigkeit zu erreichen. Bild VI-9 verdeutlicht diese Aussage.

(4) Wir *linearisieren* die Funktion $f(x) = A(e^{\lambda x} - 1)$ in der Umgebung von $x_0 = 0$, wobei wir auf die folgende bekannte Mac Laurinsche Reihe von $f(z) = e^z$ zurückgreifen (A, λ sind reelle Parameter):

$$e^z = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Abbruch nach dem *linearen* Glied führt zur *linearen* Näherung

$$e^z \approx 1 + \frac{z^1}{1!} = 1 + z$$

Wir *substituieren* noch $z = \lambda x$:

$$e^{\lambda x} \approx 1 + \lambda x$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Ausgangsfunktion ein und erhalten die gewünschte *lineare* Näherungsfunktion. Sie lautet:

$$f(x) = A(e^{\lambda x} - 1) \approx A[(1 + \lambda x) - 1] =$$

$$= A(1 + \lambda x - 1) = A\lambda x = c x$$

(mit $c = A\lambda$).

(5) Die Kurve mit der Gleichung $f(x) = \left(1 - e^{-(x-2)}\right)^2 = \left(1 - e^{-x+2}\right)^2$ soll in der unmittelbaren Umgebung ihres (absoluten) *Minimums* $x_0 = 2$ durch eine *Parabel* angenähert werden. Aus diesem Grunde entwickeln wir zunächst die Funktion um die Stelle $x_0 = 2$ in der *Taylorschen Reihe* und brechen diese dann nach dem *quadratischen* Reihenglied ab. Die für diese Entwicklung benötigten Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten (unter Verwendung der *Kettenregel*):

$$f'(x) = 2\left(1 - e^{-x+2}\right) \cdot e^{-x+2} = 2\left(e^{-x+2} - e^{-2x+4}\right)$$

$$f''(x) = 2\left(-e^{-x+2} + 2 \cdot e^{-2x+4}\right)$$

Somit ist

$$f(2) = \left(1 - e^0\right)^2 = (1 - 1)^2 = 0,$$

$$f'(2) = 2\left(e^0 - e^0\right) = 2(1 - 1) = 0,$$

$$f''(2) = 2\left(-e^0 + 2e^0\right) = 2(-1 + 2) = 2$$

und die Reihenentwicklung beginnt wie folgt:

$$\left(1 - e^{-x+2}\right)^2 = 0 + \frac{0}{1!}(x-2)^1 + \frac{2}{2!}(x-2)^2 + \ldots = (x-2)^2 + \ldots$$

Durch *Abbruch* nach dem *quadratischen* Glied erhalten wir die gewünschte Näherung durch eine *Parabel*. Sie lautet:

$$\left(1 - e^{-x+2}\right)^2 \approx (x-2)^2 \qquad (|x - 2| \ll 1)$$

Bild VI-10 zeigt den Verlauf der gegebenen Funktion mit ihrer Näherungsparabel im Intervall $1{,}7 \le x \le 2{,}3$.

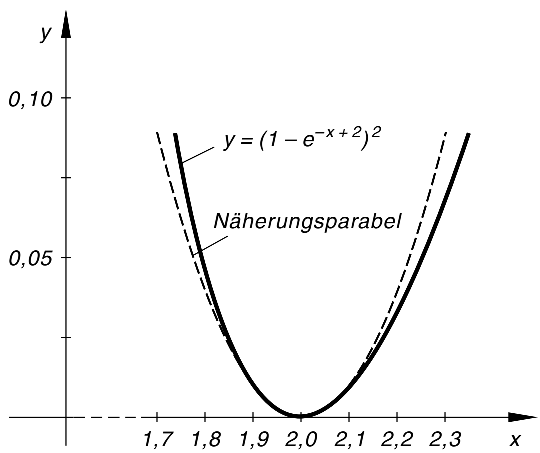

Bild VI-10

■

In der nachfolgenden Tabelle 2 findet der Leser eine Zusammenstellung der ersten beiden *Näherungspolynome* für einige besonders wichtige Funktionen. Man erhält sie aus den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen durch Abbruch nach dem 1. bzw. 2. *nichtkonstanten* Glied (siehe hierzu auch Tabelle 1). Sie gelten nur in der unmittelbaren Umgebung des jeweiligen Entwicklungszentrums.

Tabelle 2: Näherungspolynome wichtiger elementarer Funktionen

Funktion	Entwicklungszentrum	1. Näherung	2. Näherung
$(1 \pm x)^n$	$x_0 = 0$	$1 \pm nx$	$1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$
$\sin x$	$x_0 = 0$	x	$x - \frac{1}{6} x^3$
$\cos x$	$x_0 = 0$	$1 - \frac{1}{2} x^2$	$1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$
$\tan x$	$x_0 = 0$	x	$x + \frac{1}{3} x^3$
e^x	$x_0 = 0$	$1 + x$	$1 + x + \frac{1}{2} x^2$
$\ln x$	$x_0 = 1$	$x - 1$	$x - 1 - \frac{1}{2} (x-1)^2$
$\arcsin x$	$x_0 = 0$	x	$x + \frac{1}{6} x^3$
$\arccos x$	$x_0 = 0$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6} x^3$
$\arctan x$	$x_0 = 0$	x	$x - \frac{1}{3} x^3$
$\sinh x$	$x_0 = 0$	x	$x + \frac{1}{6} x^3$
$\cosh x$	$x_0 = 0$	$1 + \frac{1}{2} x^2$	$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$
$\tanh x$	$x_0 = 0$	x	$x - \frac{1}{3} x^3$